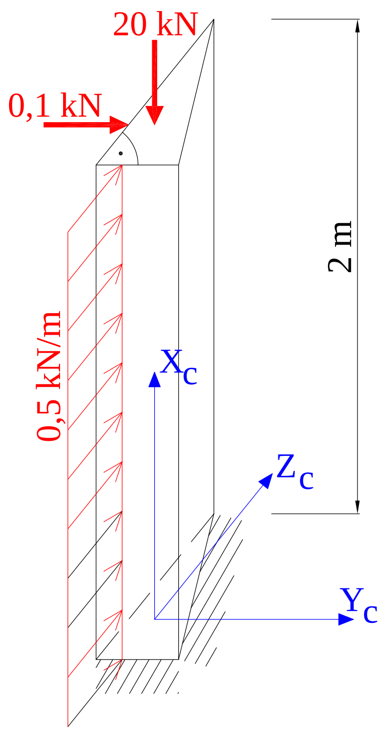
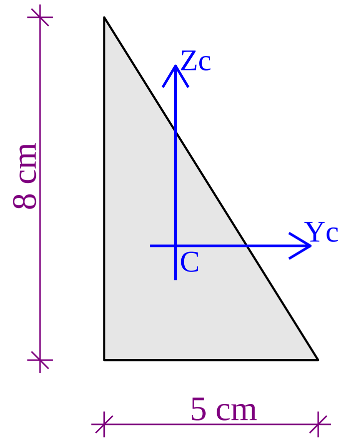
Przykład 4.2. Sprawdzenie naprężeń normalnych

Sprawdzić warunki nośności przekroju ze względu na naprężenia normalne jeśli naprężenia dopuszczalne są równe:

$$k_c = 120 \text{ MPa}$$
$$k_r = 80 \text{ MPa}$$





Rozwiązanie

Zadanie zostanie rozwiązane dwoma sposobami różniącymi się wyborem układu współrzędnych, w jakim zostaną wykonane obliczenia.

SPOSÓB 1 - obliczenia w układzie centralnych osi bezwładności

Sprawdzenie warunku nośności przekroju ze względu na naprężenia normalne polega na porównaniu występujących w przekroju naprężeń normalnych z dopuszczalnymi. Rozwiązywanie zadania rozpocząć należy od określenia charakterystyk geometrycznych przekroju.

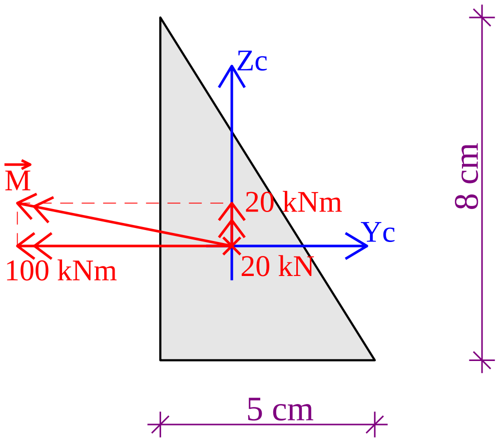
$$A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 = 20 \text{ cm}^2$$
$$J_{y_c} = \frac{5 \cdot 8^3}{36} = 71{,}11 \text{ cm}^4$$
$$J_{z_c} = \frac{8 \cdot 5^3}{36} = 27{,}78 \text{ cm}^4$$
$$J_{y_c z_c} = -\frac{5^2 \cdot 8^2}{72} = -22{,}22 \text{ cm}^4$$

W przekroju odległym o $x \in \langle 0; 2\ \mathrm{m}\rangle$ od podstawy słupa siły wewnętrzne mają wartość:

$$N = -20\ \mathrm{kN}$$
$$M_{y_c} = -0{,}5\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}} \cdot (2\ \mathrm{m} - x) \cdot \frac{1}{2} \cdot (2\ \mathrm{m} - x) = -0{,}25\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}} \cdot (2\ \mathrm{m} - x)^2$$
$$M_{z_c} = 0{,}1\ \mathrm{kN} \cdot (2\ \mathrm{m} - x)$$

Wyraźnie widać, że maksymalne wartości sił wewnętrznych występują dla $x = 0$, tj. w podstawie słupa, gdzie

$$N = -20\ \mathrm{kN}$$
$$M_{y_c} = -0{,}25\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}} \cdot (2\ \mathrm{m} - 0)^2 = -1\ \mathrm{kNm} = -100\ \mathrm{kNcm}$$
$$M_{z_c} = 0{,}1\ \mathrm{kN} \cdot (2\ \mathrm{m} - 0) = 0{,}2\ \mathrm{kNm} = 20\ \mathrm{kNcm}$$



Wzór na naprężenia normalne obowiązujący dla centralnych osi bezwładności ma postać:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{J_{y_cz_c}M_{y_c} + J_{y_c}M_{z_c}}{J_{y_cz_c}^2 - J_{y_c}J_{z_c}}y - \frac{J_{y_cz_c}M_{z_c} + J_{z_c}M_{y_c}}{J_{y_cz_c}^2 - J_{y_c}J_{z_c}}z$$

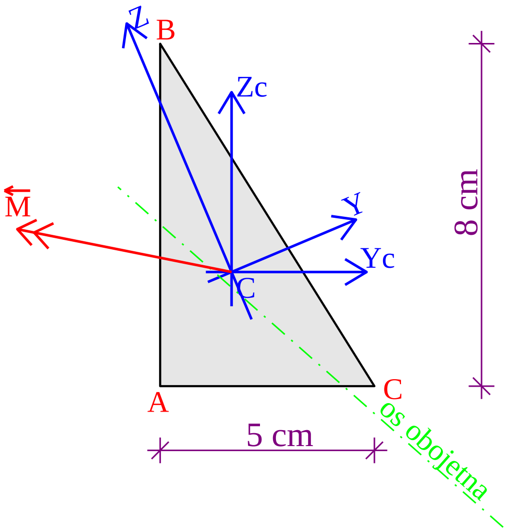
Podstawiając obliczone wartości momentów bezwładności i sił wewnętrznych otrzymujemy:

$$\sigma_x = \frac{-20}{20} + \frac{-22{,}22 \cdot (-100) + 71{,}11 \cdot 20}{(-22{,}22)^2 - 71{,}11 \cdot 27{,}78}y_c - \frac{-22{,}22 \cdot 20 + 27{,}78 \cdot (-100)}{(-22{,}22)^2 - 71{,}11 \cdot 27{,}78}z_c =$$
$$= -1 - 2{,}46y_c - 2{,}175z_c$$

Równanie osi obojętnej otrzymujemy przyrównując naprężenie normalne σ_x do zera.

$$\sigma_x = 0 \quad \Longrightarrow \quad -1 - 2{,}46y_c - 2{,}175z_c = 0 \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{y_c}{\frac{1}{-2{,}46}} + \frac{z_c}{\frac{1}{-2{,}175}} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{y_c}{-0{,}4065} + \frac{z_c}{-0{,}4598} = 1$$

Tak więc oś obojętna przechodzi przez punkty $(0; -0{,}4598\ \mathrm{cm})$ i $(-0{,}4065\ \mathrm{cm}; 0)$.



Na powyższym rysunku pokazano oprócz położenia osi obojętnej również wypadkowy wektor momentu zginającego oraz główne centralne osie bezwładności (ich położenie wyznaczane jest przy okazji obliczeń wykonywanych sposobem 2). Zrobiono to w celu sprawdzenia poprawności obliczeń. W przypadku zginania ukośnego jest bowiem regułą, że oś obojętna przekroju odchyla się od kierunku wypadkowego momentu zginającego w kierunku osi minimalnego momentu bezwładności. W rozpatrywanym przypadku zasada ta jest spełniona (moment $J_z < J_y$).

Skrajne wartości naprężeń występują w punktach przekroju najbardziej odległych od osi obojętnej, tj. w punktach A i B.

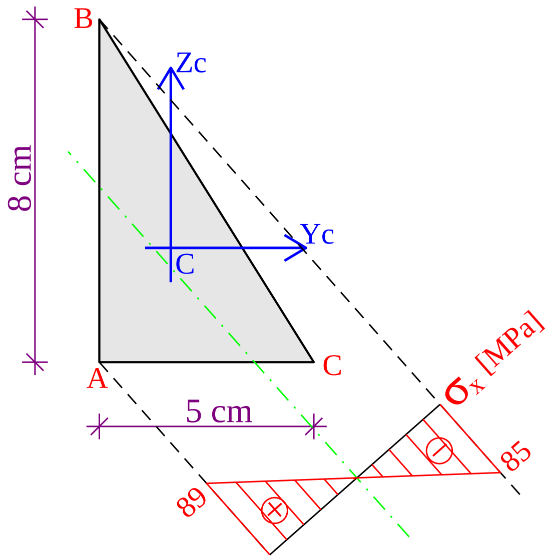
$$\sigma_x^A = \sigma_x\left(-\frac{5}{3}\ \mathrm{cm}; -\frac{8}{3}\ \mathrm{cm}\right) = -1 - 2{,}46\cdot\left(-\frac{5}{3}\right) - 2{,}175\cdot\left(-\frac{8}{3}\right) =$$
$$= -1 + 4{,}1 + 5{,}8 = 8{,}9\ \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2}$$
$$\sigma_x^B = \sigma_x\left(-\frac{5}{3}\ \mathrm{cm}; 2\cdot\frac{8}{3}\ \mathrm{cm}\right) = -1 - 2{,}46\cdot\left(-\frac{5}{3}\right) - 2{,}175\cdot 2\cdot\frac{8}{3} =$$
$$= -1 + 4{,}1 - 11{,}6 = -8{,}5\ \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2}$$

Aby porównać otrzymane wyniki z naprężeniami dopuszczalnymi należy przeliczyć jednostki:

$$\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2} = \frac{10^{-3}\ \mathrm{MN}}{10^{-4}\ \mathrm{m}^2} = 10\ \mathrm{MPa}$$

Tak więc

$$\sigma_x^A = 89\ \mathrm{MPa} = \sigma_{max}$$
$$\sigma_x^B = -85\ \mathrm{MPa} = \sigma_{min}$$



Warunek nośności ze względu na naprężenia normalne w przekroju jest spełniony wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\sigma_{max} \leqslant k_r \quad \wedge \quad |\sigma_{min}| \leqslant k_c$$

W rozpatrywanym przypadku

$$\sigma_{max} = 89 \text{ MPa} \nleqslant k_r = 80 \text{ MPa} \quad \wedge \quad |\sigma_{min}| = 85 \text{ MPa} < k_c = 120 \text{ MPa}$$

Ponieważ naprężenia ściskające są, co do wartości bezwzględnej, większe niż dopuszczalne badany słup nie spełnia warunku nośności ze względu na naprężenia normalne w przekroju.

SPOSÓB 2 - obliczenia w układzie głównych centralnych osi bezwładności

Podobnie jak w sposobie 1 obliczenia należy rozpocząć od określenia charakterystyk geometrycznych przekroju:

$$A = 20 \text{ cm}^2$$
$$J_{y_c} = 71{,}11 \text{ cm}^4$$
$$J_{z_c} = 27{,}78 \text{ cm}^4$$
$$J_{y_c z_c} = -22{,}22 \text{ cm}^4$$

W dalszej kolejności obliczyć należy wartości głównych centralnych momentów bezwładności oraz położenie osi głównych centralnych.

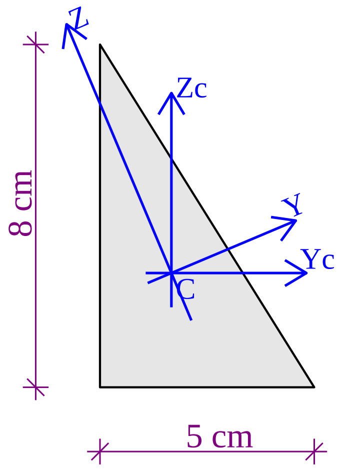
$$I_{1,2} = \frac{1}{2}\left(I_{y_c} + I_{z_c}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_{y_c} - I_{z_c}\right)^2 + 4I_{y_c z_c}^{\;2}} =$$
$$= \frac{1}{2}(71{,}11 + 27{,}78) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(71{,}11 - 27{,}78)^2 + 4 \cdot (-22{,}22)^2} = 49{,}44 \pm 31{,}04$$

Tak więc

$$
\begin{aligned}
I_1 &= 49{,}44 + 31{,}04 = 80{,}48\ \mathrm{cm}^4 \quad &= J_y \\
I_2 &= 49{,}44 - 31{,}04 = 18{,}41\ \mathrm{cm}^4 \quad &= J_z
\end{aligned}
$$

Kąt nachylenia osi głównych Y i Z obliczamy następująco:

$$
\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2I_{y_c z_c}}{I_{y_c} - I_{z_c}} = \frac{-2 \cdot (-22{,}22)}{71{,}11 - 27{,}78} = \quad \Longrightarrow \quad 2\alpha = 45{,}73^o \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 22{,}86^o
$$



W następnym etapie wyznaczyć trzeba wzory transformacyjne przekształcające współrzędne centralne we współrzędne główne centralne. Wzory te mają postać:

$$
\begin{aligned}
y &= y_c \cos\alpha + z_c \sin\alpha = y_c \cos 22{,}86^o + z_c \sin 22{,}86^o = 0{,}9214 y_c + 0{,}3885 z_c \\
z &= -y_c \sin\alpha + z_c \cos\alpha = -y_c \sin 22{,}86^o + z_c \cos 22{,}86^o = -0{,}3885 y_c + 0{,}9214 z_c
\end{aligned}
$$

Analogicznie określone są wzory na składowe momenty zginające M_y i M_z (podstawiono wartości momentów M_{y_c} i M_{z_c} obliczone wcześniej):

$$
\begin{aligned}
M_y &= M_{y_c} \cos\alpha + M_{z_c} \sin\alpha = -100 \cos 22{,}86^o + 20 \sin 22{,}86^o = -84{,}37\ \mathrm{kNcm} \\
M_z &= -M_{y_c} \sin\alpha + M_{z_c} \cos\alpha = -(-100) \sin 22{,}86^o + 20 \cos 22{,}86^o = 57{,}28\ \mathrm{kNcm}
\end{aligned}
$$

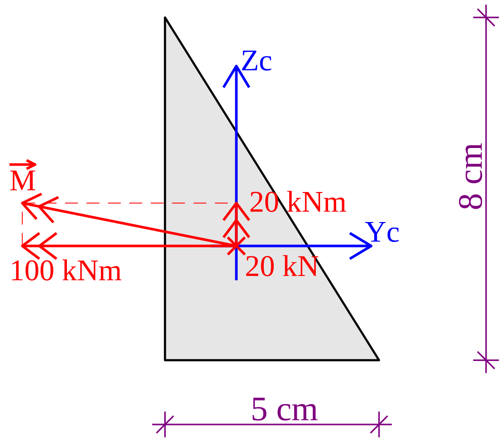
Podstawiając otrzymane powyżej wartości do wzoru na naprężenia normalne określane we współrzędnych głównych centralnych otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= \sigma_x^N + \sigma_x^{M_z} + \sigma_x^{M_y} = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z = \frac{-20}{20} - \frac{57{,}28}{18{,}41} y + \frac{-84{,}37}{80{,}48} z = \\
&= -1 - 3{,}112 y - 1{,}048 z
\end{aligned}
$$

Przyrównując wzór na naprężenie normalne do zera otrzymujemy równanie osi obojętnej.

$$
\begin{aligned}
\sigma_x = 0 \quad &\Longrightarrow \quad -1 - 3{,}112 y_c - 1{,}048 z_c = 0 \quad \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow \quad \frac{y_c}{\frac{1}{-3{,}112}} + \frac{z_c}{\frac{1}{-1{,}048}} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{y_c}{-0{,}3214} + \frac{z_c}{-0{,}9539} = 1
\end{aligned}
$$

Tak więc oś obojętna przechodzi przez punkty $(0; -0{,}9539\ \mathrm{cm})$ i $(-0{,}3214\ \mathrm{cm}; 0)$.



Najbardziej oddalone od osi obojętnej są punkty A i B. Współrzędne tych punktów, liczone w układzie $Y_c C Z_c$, są równe:

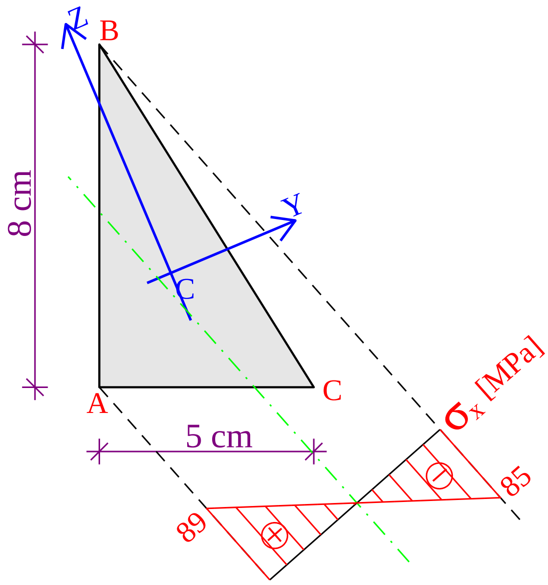
$$
y_c^A = -\frac{5}{3} \qquad y_c^B = -\frac{5}{3}
$$
$$
z_c^A = -\frac{8}{3} \qquad z_c^B = \frac{16}{3}
$$

Stosując wyprowadzony wcześniej wzór na transformację współrzędnych obliczamy:

$$
\begin{aligned}
y^A &= 0{,}9214 y_c^A + 0{,}3885 z_c^A = 0{,}9214 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) + 0{,}3885 \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) = -2{,}572\ \mathrm{cm} \\
z^A &= -0{,}3885 y_c^A + 0{,}9214 z_c^A = -0{,}3885 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) + 0{,}9214 \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) = -1{,}810\ \mathrm{cm} \\
y^B &= 0{,}9214 y_c^B + 0{,}3885 z_c^B = 0{,}9214 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) + 0{,}3885 \cdot \frac{16}{3} = 0{,}5364\ \mathrm{cm} \\
z^B &= -0{,}3885 y_c^B + 0{,}9214 z_c^B = 0{,}3885 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) + 0{,}9214 \cdot \frac{16}{3} = 5{,}562\ \mathrm{cm}
\end{aligned}
$$

Obliczone współrzędne punktów A i B wstawiamy do wzoru na naprężenia normalne i uzyskujemy wartości naprężeń ekstremalnych w przekroju.

$$
\begin{aligned}
\sigma_x^A &= \sigma_x\left(-2{,}572\ \mathrm{cm}; -1{,}810\ \mathrm{cm}\right) = -1 - 3{,}112 \cdot (-2{,}572) - 1{,}048 \cdot (-1{,}810) = \\
&= 8{,}9\ \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2} = 89\ \mathrm{MPa} \\
\sigma_x^B &= \sigma_x\left(0{,}5364\ \mathrm{cm}; 5{,}562\ \mathrm{cm}\right) = -1 - 3{,}112 \cdot 0{,}5364 - 1{,}048 \cdot 5{,}562 = -8{,}5\ \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2} = \\
&= -85\ \mathrm{MPa}
\end{aligned}
$$



Warunek nośności nie jest spełniony gdyż:

$$\sigma_{max} = 89 \text{ MPa} \nleq k_r = 80 \text{ MPa} \quad \wedge \quad |\sigma_{min}| = 85 \text{ MPa} < k_c = 120 \text{ MPa}$$