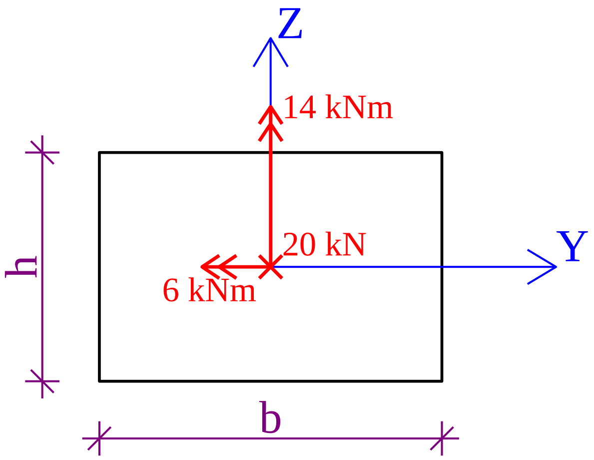
Przykład 4.3. Stopa fundamentowa

Dana jest prostopadłościenna stopa fundamentowa. Obciążenia występujące w przekroju podstawy o wymiarach b x h pokazane są na rysunku poniżej. Uwzględniając warunek niewystępowania w przekroju podstawy stopy naprężeń rozciągających, określić minimalne pole powierzchni podstawy stopy i odpowiadające temu polu długości boków podstawy.



$$P = 100 \text{ kN}$$
$$M_y = -6 \text{ kNm}$$
$$M_z = 14 \text{ kNm}$$

Rozwiązanie

Rozwiązanie zadania polega na określeniu warunków, których spełnienie jest konieczne, aby w przekroju podstawy stopy nie wystąpiły naprężenia różnych znaków (czyli aby jedna część podstawy nie była rozciągana, gdy druga jest ściskana).
W przypadku przyjętego układu osi YZ wzór na naprężenia normalne w przekroju ma postać:

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z$$

Przekrój jest ściskany siłą P, więc

$$N = -P$$

Uwzględniając powyższy fakt oraz charakterystyki geometryczne przekroju

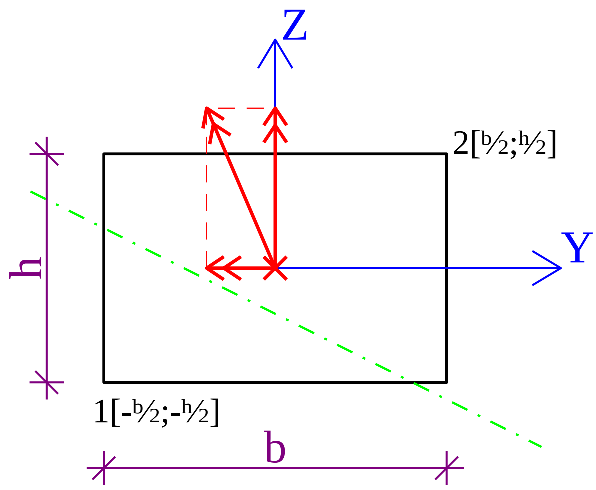
$$A = bh$$
$$I_y = \frac{bh^3}{12}$$
$$I_z = \frac{b^3h}{12}$$

można zapisać:

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z = \frac{-P}{A} - \frac{M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z = -\frac{100}{bh} - \frac{14}{\frac{b^3h}{12}}y + \frac{-6}{\frac{bh^3}{12}}z =$$
$$= -\frac{100}{bh} - \frac{168}{b^3h}y - \frac{72}{bh^3}z = -\frac{4}{bh}\left(25 + \frac{4}{b^2}y + \frac{18}{h^2}z\right)$$

Ekstremalne wartości naprężeń występują w punktach przekroju najbardziej oddalonych od osi obojętnej, której równanie znajdujemy przyrównując naprężenie normalne do zera.

$$\sigma_x = 0 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{4}{bh}\left(25 + \frac{4}{b^2}y + \frac{18}{h^2}z\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 25 + \frac{4}{b^2}y + \frac{18}{h^2}z = 0 \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{y}{-\frac{b^2}{4\cdot 25}} + \frac{z}{-\frac{h^2}{18\cdot 25}} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{y}{-10^{-2}b^2} + \frac{z}{-2{,}222\cdot 10^{-2}h^2} = 1$$



Niezależnie od wartości b i h oś obojętna przecina osie układu współrzędnych dla ujemnych wartości y i z. Oznacza to, że ekstremalne wartości naprężeń występują w punktach 1 i 2. Tak więc rozwiązanie postawionego problemu polega na takim dobraniu wymiarów b i h, by w obu tych punktach naprężenie normalne σ miało ten sam znak. Z uwagi na znak siły normalnej i zwrot wypadkowego momentu uwzględnienie tego warunku sprowadza się w praktyce do spełnienia warunku niedodatności naprężenia maksymalnego, a więc naprężenia w punkcie 1.

$$\sigma_1 = \sigma\left(-\frac{b}{2}; -\frac{h}{2}\right) = -\frac{4}{bh}\left[25 + \frac{42}{b^2}\left(-\frac{b}{2}\right) + \frac{18}{h^2}\left(-\frac{h}{2}\right)\right] =$$
$$= -\frac{4}{bh}\left(25 - \frac{21}{b} - \frac{9}{h}\right)$$

$$\sigma_1 \leqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{4}{bh}\left(25 - \frac{21}{b} - \frac{9}{h}\right) \leqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad 25 - \frac{21\ \mathrm{m}}{b} - \frac{9}{h} \geqslant 0 \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{9}{h} \leqslant 25 - \frac{21}{b} \quad \Longrightarrow \quad h \geqslant \frac{9}{25 - \frac{21}{b}} \quad \Longrightarrow \quad h \geqslant \frac{9b}{25b - 21}$$

Wynika z tego, że pole podstawy stopy P ma wartość:

$$P = bh \geqslant b \cdot \frac{9b}{25b - 21} = \frac{9b^2}{25b - 21}$$

Z uwagi na fakt, że poszukujemy minimalnej wartości pola, do dalszych obliczeń przyjmijmy

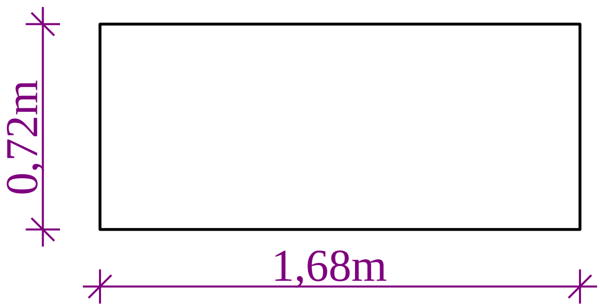
$$P = P(b) = \frac{9}{25b - 21}\, b^2$$

Pole przyjmuje wartość ekstremalną (w tym przypadku minimum) dla takiej wartości wymiaru b, dla którego pochodna funkcji $P(b)$ jest równa zero.

$$
\begin{aligned}
P'(b) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \left(\frac{9}{25b-21}\,b^2\right)' = 0 \quad \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow \quad \frac{9\cdot 2b\cdot(25b-21) - 9\cdot b^2\cdot 25}{(25b-21)^2} = 0 \quad \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow \quad \frac{9b\cdot[2\,(25b-21) - 25b]}{(25b-21)^2} = 0 \quad \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow \quad \frac{9b\cdot(25b-42)}{(25b-21)^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad b = \frac{42}{25}\ \mathrm{m} = 1,68\ \mathrm{m}
\end{aligned}
$$

Długość drugiego boku podstawy h odpowiadająca najmniejszemu polu jest zaś równa

$$
h = \frac{9b}{25b-21} = \frac{9\cdot\frac{42}{25}}{25\cdot\frac{42}{25} - 21} = \frac{9\cdot 42}{21\cdot 25} = \frac{18}{25}\ \mathrm{m} = 0,72\ \mathrm{m}
$$



Tak więc ostatecznie minimalna wielkość pola powierzchni stopy fundamentowej poddanej danemu obciążeniu, spełniająca warunek niewystępowania w przekroju podstawy stopy naprężeń rozciągających, jest następująca:

$$
P = bh = \frac{42}{25}\ \mathrm{m}\cdot\frac{18}{25}\ \mathrm{m} = \frac{756}{625}\ \mathrm{m}^2 = 1,2096\ \mathrm{m}^2
$$