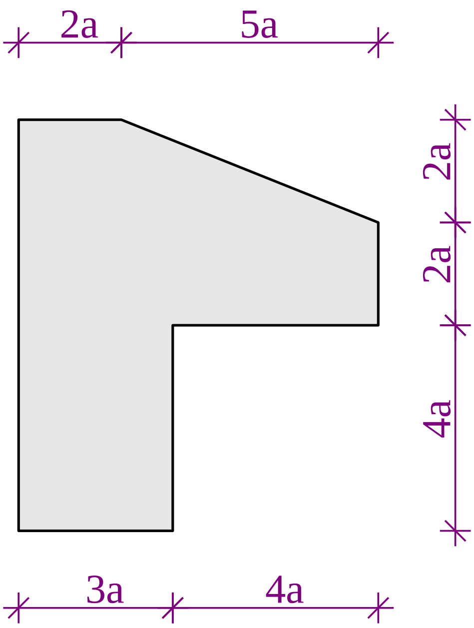
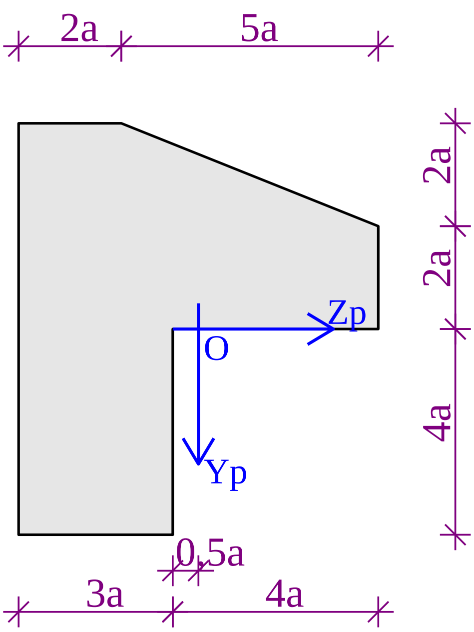
Przykład 4.4. Rdzeń przekroju

Wyznaczyć rdzeń poniższego przekroju.

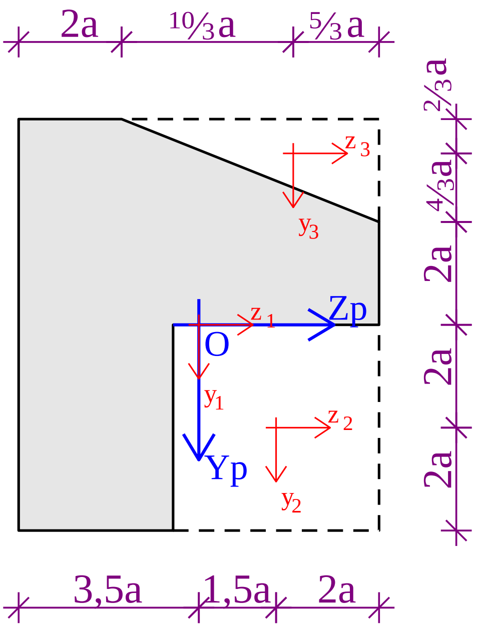


Rozwiązanie

Rozwiązywanie zadania rozpocząć należy od określenia charakterystyk geometrycznych przekroju. Aby znaleźć środek ciężkości należy przyjąć wyjściowy układ współrzędnych Y_pOZ_p.



Rozpatrywany przekrój jest figurą złożoną, co oznacza, że nie potrafimy bezpośrednio określić położenia jego środka ciężkości. Aby znaleźć ten punkt należy podzielić badany przekrój na figury proste, tj. takie, dla których znamy położenie środka ciężkości (prostokąty, trójkąty, wycinki koła). Przyjęto podział na trzy figury: prostokąt o wymiarach $7a$ x $8a$, kwadrat o boku $4a$ i trójkąt prostokątny o wymiarach przyprostokątnych $5a$ i $2a$. Dwie ostatnie figury będą traktowane jak figury o polu ujemnym.



Pole badanego przekroju jest równe:

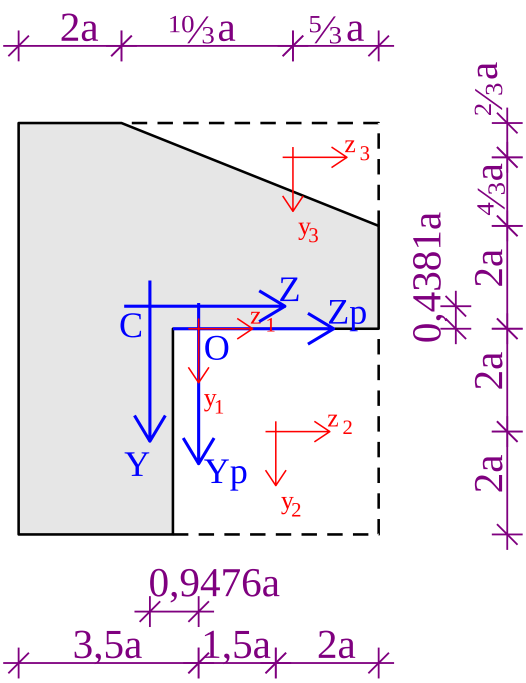
$$A = 7a \cdot 8a - (4a)^2 - \frac{1}{2} \cdot 5a \cdot 2a = 56a^2 - 16a^2 - 5a^2 = 35a^2$$

zaś momenty statyczne

$$S_{y_p} = 56a^2 \cdot 0 - 16a^2 \cdot 1{,}5a - 5a^2 \cdot \left(3{,}5a - \frac{5}{3}a\right) = -24a^3 - 9{,}167a^3 = -33{,}17a^3$$
$$S_{z_p} = 56a^2 \cdot 0 - 16a^2 \cdot 2a - 5a^2 \cdot \left(-2a - \frac{4}{3}a\right) = -32a^3 + 16{,}67a^3 = -15{,}33a^3$$

stąd środek ciężkości ma współrzędne

$$y_p = \frac{S_{z_c}}{A} = \frac{-15{,}33a^3}{35a^2} = -0{,}4381a$$
$$z_p = \frac{S_{y_c}}{A} = \frac{-33{,}17a^3}{35a^2} = -0{,}9476a$$



Obliczmy momenty bezwładności przekroju względem osi Y_p i Z_p.

$$J_{y_p} = \frac{8a\cdot(7a)^3}{12} - \left[\frac{(4a)^4}{12} + 16a^2\cdot(1{,}5a)^2\right] - \left[\frac{2a\cdot(5a)^3}{36} + 5a^2\cdot\left(3{,}5a - \frac{5}{3}a\right)^2\right] =$$

$$= 228{,}7a^4 - 57{,}33a^4 - 23{,}75a^4 = 147{,}6a^4$$

$$J_{z_p} = \frac{7a\cdot(8a)^3}{12} - \frac{(4a)^4}{3} - \left[\frac{5a\cdot(2a)^3}{36} + 5a^2\cdot\left(-2a - \frac{4}{3}a\right)^2\right] =$$

$$= 298{,}7a^4 - 85{,}33a^4 - 56{,}67a^4 = 156{,}7a^4$$

$$J_{y_pz_p} = -16a^2\cdot 1{,}5a\cdot 2a - \left[\frac{(5a)^2\cdot(2a)^2}{72} + 5a^2\cdot\left(3{,}5a - \frac{5}{3}a\right)\cdot\left(-2a - \frac{4}{3}a\right)\right] =$$

$$= -48a^4 + 29{,}17a^4 = -18{,}83a^4$$

Korzystając ze wzorów Steinera można obliczyć wartość momentów bezwładności względem osi centralnych YZ.

$$J_y = 147{,}6a^4 - 35a^2\cdot(-0{,}9476a)^2 = 116{,}2a^4$$

$$J_z = 156{,}7a^4 - 35a^2\cdot(-0{,}4381a)^2 = 149{,}9a^4$$

$$J_{yz} = -18{,}83a^4 - 35a^2\cdot(-0{,}9476a)\cdot(-0{,}4381a) = -33{,}36a^4$$

Stąd kwadraty promieni bezwładności oraz iloraz $\frac{J_{yz}}{A} \equiv i_{yz}^{\,2}$ mają wartości ($i_{yz}^{\,2}$ traktujemy jako symbol, nie zaś jako kwadrat liczby):

$$i_y^{\,2} = \frac{J_y}{A} = \frac{116{,}2a^4}{35a^2} = 3{,}319a^2$$

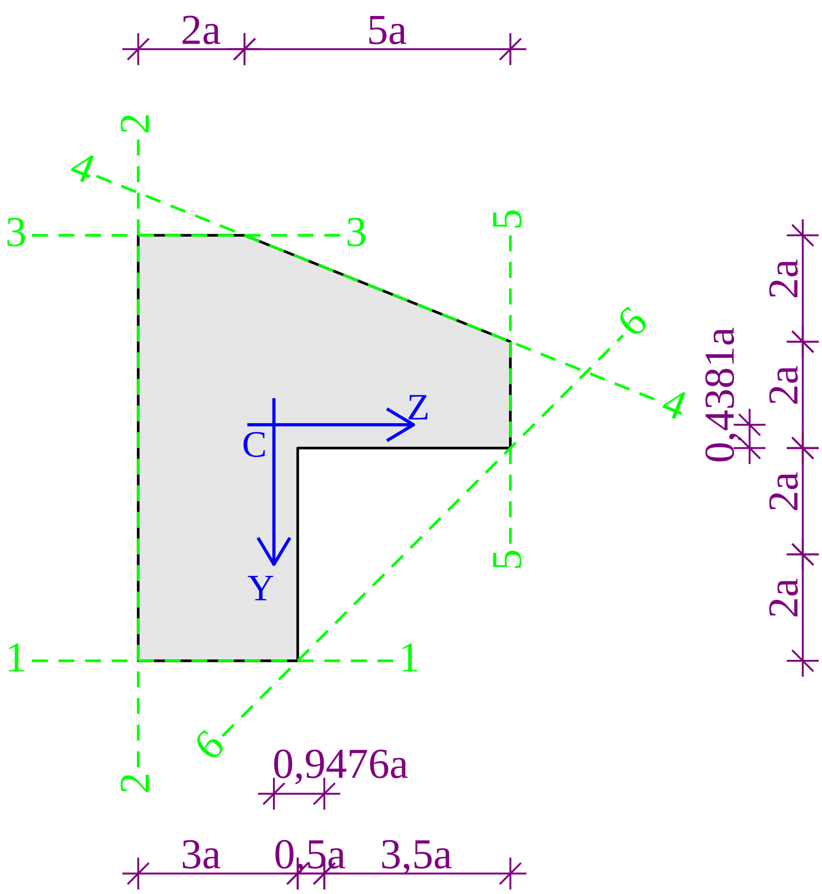
$$i_z^{\,2} = \frac{J_z}{A} = \frac{149{,}9a^4}{35a^2} = 4{,}284a^2$$

$$i_{yz}^{\,2} = \frac{J_{yz}}{A} = \frac{-33{,}36a^4}{35a^2} = -0{,}9532a^2$$

Poszukiwany rdzeń przekroju wyznaczać będziemy we współrzędnych centralnych, a nie głównych centralnych. Podejście to ma szereg zalet powodujących, że zastosowanie go w rozpatrywanym przypadku jest bardziej racjonalne ze względu na nakład obliczeń. Po pierwsze nie ma potrzeby wyznaczania osi głównych przekroju oraz momentów bezwładności i promieni bezwładności względem tych osi. Po drugie nie musimy dokonywać transformacji współrzędnych punktów przekroju z układu centralnego do układu głównego centralnego.
Współrzędne wierzchołków rdzenia przekroju, określone w układzie centralnym YCZ, oblicza się z wzorów:

$$y_p = -\frac{{i_z}^2}{a_y} - \frac{{i_{yz}}^2}{a_z} = -\frac{4{,}284a^2}{a_y} - \frac{-0{,}9532a^2}{a_z} = -\frac{4{,}284a^2}{a_y} + \frac{0{,}9532a^2}{a_z}$$
$$z_p = -\frac{{i_y}^2}{a_z} - \frac{{i_{yz}}^2}{a_y} = -\frac{3{,}319a^2}{a_z} - \frac{-0{,}9532a^2}{a_y} = -\frac{3{,}319a^2}{a_z} + \frac{0{,}9532a^2}{a_y}$$

gdzie a_y i a_z oznaczają współrzędne punktów przecięcia przyjętych osi obojętnych z osiami współrzędnych. Osie obojętne należy oczywiście przyjmować w taki sposób, by tworzyły one obrys badanego przekroju. W rozpatrywanym przypadku należy przyjąć sześć różnych położeń osi obojętnej.



Dla osi 1-1

$$a_y = 4a + 0{,}4381a = 4{,}438a$$
$$a_z = \pm\infty$$

tak więc współrzędne odpowiadającego tej osi punktu rdzenia mają wartość:

$$y_{p_1} = -\frac{4{,}284a^2}{4{,}438a} + \frac{0{,}9532a^2}{\pm\infty} = -0{,}9653a$$
$$z_{p_1} = -\frac{3{,}319a^2}{\pm\infty} + \frac{0{,}9532a^2}{4{,}438a} = 0{,}2148a$$

Analogicznie obliczane są współrzędne punktów rdzenia odpowiadających pozostałym osiom obojętnym.
Dla osi 2-2

$$a_y = \pm\infty$$
$$a_z = 0{,}9476a - 3{,}5a = -2{,}552a$$

$$y_{p_2} = -\frac{4{,}284a^2}{\pm\infty} + \frac{0{,}9532a^2}{-2{,}552a} = -0{,}3735a$$
$$z_{p_2} = -\frac{3{,}319a^2}{-2{,}552a} + \frac{0{,}9532a^2}{\pm\infty} = 1{,}300a$$

Dla osi 3-3

$$a_y = -4a + 0{,}4381a = -3{,}562a$$
$$a_z = \pm\infty$$

$$y_{p_3} = -\frac{4{,}284a^2}{-3{,}562a} + \frac{0{,}9532a^2}{\pm\infty} = 1{,}203a$$
$$z_{p_3} = -\frac{3{,}319a^2}{\pm\infty} + \frac{0{,}9532a^2}{-3{,}562a} = -0{,}2676a$$

Dla osi 4-4

$$a_y = 0{,}4381a - 4a + (3{,}5a - 0{,}9476a - 2a) \cdot \frac{2}{5} = -3{,}341a$$
$$a_z = 0{,}9476a + 3{,}5a + (2a - 0{,}4381a) \cdot \frac{5}{2} = 8,352a$$

$$y_{p_4} = -\frac{4{,}284a^2}{-3{,}341a} + \frac{0{,}9532a^2}{8,352a} = 1{,}396a$$
$$z_{p_4} = -\frac{3{,}319a^2}{8,352a} + \frac{0{,}9532a^2}{-3{,}341a} = -0{,}6827a$$

Dla osi 5-5

$$a_y = \pm\infty$$
$$a_z = 0{,}9476a + 3{,}5a = 4{,}448a$$

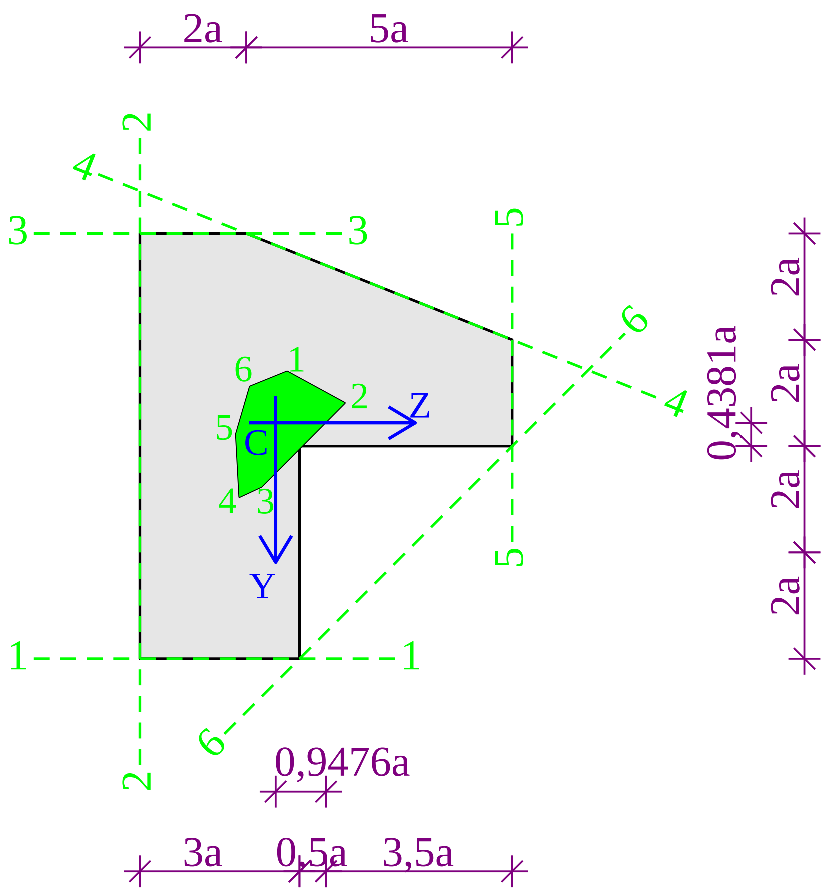
$$y_{p_5} = -\frac{4{,}284a^2}{\pm\infty} + \frac{0{,}9532a^2}{4{,}448a} = 0{,}2143a$$
$$z_{p_5} = -\frac{3{,}319a^2}{4{,}448a} + \frac{0{,}9532a^2}{\pm\infty} = -0{,}7462a$$

Dla osi 6-6

$$a_y = 0{,}4381a + 4a + (0{,}9476a + 3{,}5a - 4a) \cdot \frac{4}{4} = 4{,}886a$$
$$a_z = 0{,}9477a + 3{,}5a + 0{,}4381 \cdot \frac{4}{4} = 4{,}886a$$

$$y_{p6} = -\frac{4{,}284a^2}{4{,}886a} + \frac{0{,}9532a^2}{4{,}886a} = -0{,}6818a$$
$$z_{p6} = -\frac{3{,}319a^2}{4{,}886a} + \frac{0{,}9532a^2}{4{,}886a} = -0{,}4842a$$

Wyznaczone punkty stanowią wierzchołki szukanego rdzenia przekroju, którego kształt pokazany jest na rysunku poniżej.



Należy zwrócić uwagę, że rdzeń funkcji jest figurą wypukłą zawierającą środek ciężkości przekroju. Własność tę można wykorzystać w celu sprawdzenia poprawności wykonanych obliczeń.