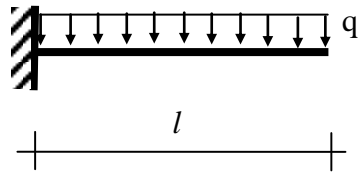


## Przykład 5.1. Wyznaczenie linii ugięcia belki - metoda analityczna

Wyznaczyć linię ugięcia belki o podanym schemacie i stałej sztywności  $EJ$ . Obliczyć strzałkę ugięcia.

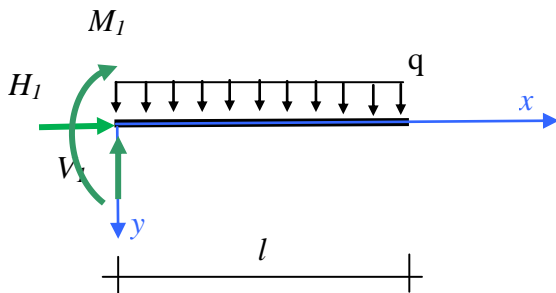


### Rozwiązanie

Zadanie jest statycznie wyznaczalne, a więc można znaleźć równanie momentu zginającego i do wyznaczenia ugięcia wykorzystać równanie różniczkowe osi ugiętej w postaci

$$EJ y''(x) = -M_g(x).$$

Dla poniższego układu sił



równanie momentu zginającego jest postaci  $M_g(x) = -\frac{1}{2}q(l-x)^2$ .

Rozwiążemy równanie różniczkowe osi ugiętej określone w przedziale  $(0, l)$

$$EJ y''(x) = \frac{1}{2}q(l-x)^2.$$

Po dwukrotnym całkowaniu otrzymujemy

$$EJ y'(x) = \frac{1}{2}ql^2x - \frac{1}{2}qlx^2 + \frac{1}{6}qx^3 + C_1$$

$$EJ y(x) = \frac{1}{4}ql^2x^2 - \frac{1}{6}qlx^3 + \frac{1}{24}qx^4 + C_1x + C_2$$

Równanie linii ugięcia określone jest teraz z dokładnością do dwóch stałych. Aby opisywało ono linię ugięcia rozważanej belki musi przyjmować określone wartości w miejscach podparcia. Zamocowanie sztywne w miejscu  $x=0$  jest równoznaczne z dwoma warunkami określającymi ugięcie i kąt obrotu w tym miejscu

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 0$$

Podstawiając do tych warunków równanie linii ugięcia uzyskujemy układ 2 równań

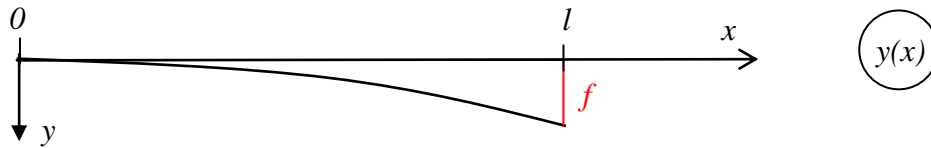
$$\begin{cases} \frac{1}{4}ql^2 \cdot 0^2 - \frac{1}{6}q \cdot 0^3 + \frac{1}{24}ql \cdot 0^4 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \\ \frac{1}{2}ql^2 \cdot 0 - \frac{1}{2}ql \cdot 0^2 + \frac{1}{6}q \cdot 0^3 + C_1 = 0 \end{cases},$$

który redukuje się do  $C_1=0$  i  $C_2=0$ .

Równanie linii ugięcia ma ostatecznie postać

$$y(x) = \frac{1}{EJ} \left( \frac{1}{24} qx^4 - \frac{1}{6} qlx^3 + \frac{1}{4} ql^2 x^2 \right).$$

Wykres linii ugięcia

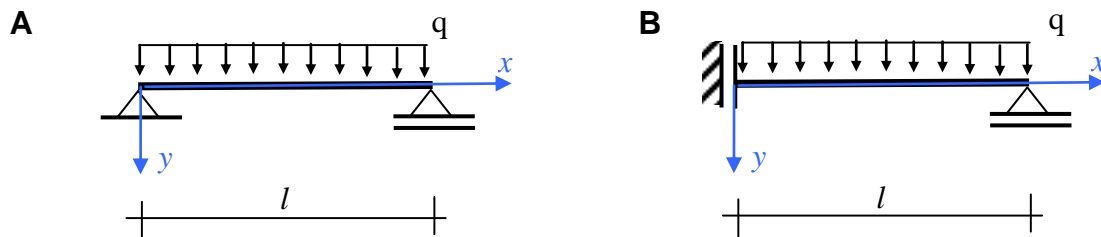


Obliczenie ugięcia maksymalnego – strzałki ugięcia

$$y_{max} = f = y(l) = \frac{1}{EJ} \left( \frac{1}{24} ql^4 - \frac{1}{6} ql^4 + \frac{1}{4} ql^4 \right) = \frac{1}{8} \frac{ql^4}{EJ}.$$

*Uwaga*

Analogicznie przebiegać będzie rozwiązanie, gdy zmieni się tylko sposób podparcia belki. Zapisujemy kolejno: równanie momentu zginającego i równanie różniczkowe linii ugięcia, całkujemy równanie różniczkowe, określamy warunki brzegowe i obliczamy stałe całkowania.



Dla belki swobodnie podpartej – A – warunki brzegowe przyjmują postać:  $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(l) = 0 \end{cases}$

Dla belki o schemacie B warunki brzegowe przyjmują postać:  $\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y(l) = 0 \end{cases}$

Dalsze rozwiązanie proponuje się przeprowadzić samodzielnie a kontrolą jego poprawności niech będzie strzałka ugięcia.

Dla belki A wynosi ona  $f = y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}$ , a dla belki B  $f = y(0) = \frac{5}{24} \frac{ql^4}{EJ}$ .