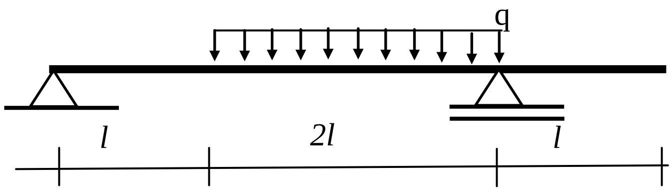
Przykład 5.2. Wyznaczenie równania linii ugięcia – metoda analityczna

Wyznaczyć linię ugięcia belki o podanym schemacie i stałej sztywności na zginanie EJ. Obliczyć przemieszczenie maksymalne - strzałkę ugięcia.

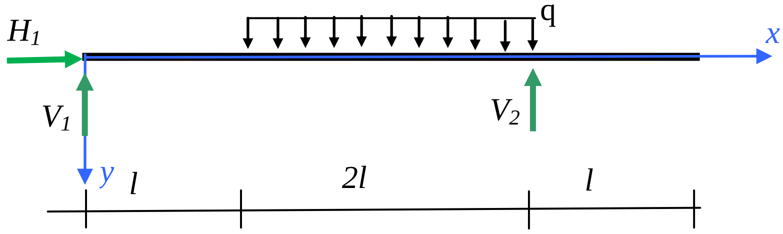


Rozwiązanie

Zadanie jest statycznie wyznaczalne, a więc można znaleźć równanie momentu zginającego i do wyznaczenia ugięcia wykorzystać równanie różniczkowe osi ugiętej w postaci

$$EJ\ y''(x) = -M_g(x).$$

Po uwolnieniu z więzów otrzymujemy poniższy układ sił.



Reakcje obliczone z warunków równowagi wynoszą

$$V_1 = \frac{2}{3}ql\ , V_2 = \frac{4}{3}ql\ , H_1 = 0\,.$$

Moment zginający opisany jest w trzech przedziałach zmienności następującymi równaniami

$$x \in (0,l),\ M_{g1}(x) = V_1\ x = \frac{2}{3}qlx$$

$$x \in (l,3l),\ M_{g2}(x) = V_1\ x - \frac{1}{2}q(x-l)^2 = \frac{2}{3}qlx - \frac{1}{2}q(x-l)^2 = -\frac{1}{2}qx^2 + \frac{5}{3}qlx - \frac{1}{2}ql^2$$

$$x \in (3l,4l),\ M_{g3}(x) = 0$$

Pociąga to konieczność zapisania trzech równań różniczkowych

$$x \in (0,l), \qquad EJ\ y_1''(x) = -M_{g1}(x)$$

$$x \in (l,3l), \qquad EJ\ y_2''(x) = -M_{g2}(x)$$

$$x \in (3l,4l), \qquad EJ\ y_3''(x) = -M_{g3}(x)$$

Ich 2-krotne całkowanie prowadzi do równań linii ugięcia w trzech przedziałach

$$x \in (0,l), \quad EJy_1(x) = -\frac{1}{9}qlx^3 + C_1x + C_2$$

$$x \in (l,3l), \quad EJy_2(x) = \frac{1}{24}qx^4 - \frac{5}{18}qlx^3 + \frac{1}{4}ql^2x^2 + D_1x + D_2$$

$$x \in (3l,4l), EJy_3(x) = F_1x + F_2$$

Dla rozważanej belki można sformułować, wynikające ze sposobu podparcia, 2 warunki brzegowe

$y_1(0)=0 \qquad (1)$

$y_2(3l)=0 \qquad (2)$

Funkcje $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ opisują oś odkształconą belki ciągłej. Oznacza to, że zarówno funkcje jak i ich pierwsze pochodne muszą być jednakowe na granicach przedziałów całkowania tak, aby linia ugięcia była krzywą gładką. Inaczej mówiąc spełnione muszą być warunki zgodności przemieszczeń i kątów obrotu (warunki zszycia). Mają one postać

$y_1(l) = y_2(l) \qquad (3)$

$y_1'(l) = y_2'(l) \qquad (4)$

$y_2(3l) = y_3(3l) \qquad (5)$

$y_2'(3l) = y_3'(3l) \qquad (6)$

Po podstawieniu otrzymujemy poniższy układ sześciu równań

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ \frac{1}{24}q(3l)^4 - \frac{5}{18}ql(3l)^3 + \frac{1}{4}ql^2(3l)^2 + D_1 3l + D_2 = 0 \\ -\frac{1}{9}ql^4 + C_1 l + C_2 = \frac{1}{24}ql^4 - \frac{5}{18}ql^4 + \frac{1}{4}ql^4 + D_1 l + D_2 \\ -\frac{1}{3}ql^3 + C_1 = \frac{1}{6}ql^3 - \frac{5}{6}ql^3 + \frac{1}{2}ql^3 + D_1 \\ \frac{1}{24}q(3l)^4 - \frac{5}{18}ql(3l)^3 + \frac{1}{4}ql^2(3l)^2 + D_1 3l + D_2 = F_1 3l + F_2 \\ \frac{1}{6}q(3l)^3 - \frac{5}{6}ql(3l)^2 + \frac{1}{2}ql^2 3l + D_1 = F_1 \end{cases}$$

Rozwiązaniem powyższego układu równań są wartości stałych

$$C_1 = \frac{7}{9}ql^3,\ C_2 = 0,\ D_1 = \frac{11}{18}ql^3,\ D_2 = \frac{1}{24}ql^4,\ F_1 = -\frac{8}{9}ql^3,\ F_2 = \frac{8}{3}ql^4.$$

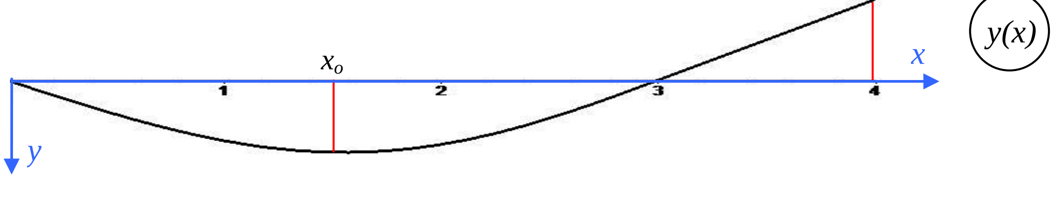
Równanie osi odkształconej belki ostatecznie przyjmuje postać

$$x \in (0,l), \quad y_1(x) = \frac{1}{EJ}\left(-\frac{1}{9}qlx^3 + \frac{7}{9}ql^3x\right)$$

$$x \in (l,3l), \quad y_2(x) = \frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{24}qx^4 - \frac{5}{18}qlx^3 + \frac{1}{4}ql^2x^2 + \frac{11}{18}ql^3x + \frac{1}{24}ql^4\right)$$

$$x \in (3l,4l), \quad y_3(x) = \frac{1}{EJ}\left(-\frac{8}{9}ql^3x + \frac{8}{3}ql^4\right)$$

Wykres linii ugięcia belki



Obliczenie ekstremalnego ugięcia – strzałki ugięcia, wymaga określenia miejsca jego występowania. Na podstawie wykresu możemy ustalić, że w przęśle będzie ona w przedziale $(l,3l)$, a na wsporniku – na jego końcu.

Z warunku $y_2'(x_o)=0$ znajdujemy x_o – miejsce ekstremalnego ugięcia w przęśle.

$$y_2'(x)=\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{6}qx^3-\frac{5}{6}qlx^2+\frac{1}{2}ql^2x+\frac{11}{18}ql^2\right)$$

$$\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{6}qx_o^{\ 3}-\frac{5}{6}qlx_o^{\ 2}+\frac{1}{2}ql^3x_o+\frac{11}{18}ql^2\right)=0 \Rightarrow x_o=1.555l$$

czyli

$$y_2(x_o)=\frac{1}{EJ}\left[\frac{1}{24}q(1.555l)^4-\frac{5}{18}ql(1.555l)^3+\frac{1}{4}ql^2(1.555l)^2+\frac{11}{18}ql^3(1.555l)+\frac{1}{24}ql^4\right]=$$

$$\cong 0.798\frac{ql^4}{EJ}$$

Przemieszczenie końca wspornika wynosi

$$y_3(4l)=\frac{1}{EJ}\left(-\frac{8}{9}ql^3 4l+\frac{8}{3}ql^4\right)=-\frac{8}{9}\frac{ql^4}{EJ}\cong -0.889\frac{ql^4}{EJ}$$

Zatem strzałka ugięcia wynosi

$$f=|y_3(4l)|\cong 0.889\frac{ql^4}{EJ}.$$

Uwaga 1

Zastosowanie metody analitycznej w powyższym zadaniu prowadziło do konieczności wyznaczenia aż 6 stałych. I chociaż metoda ta nie ma ograniczeń, to w przypadku większej ilości przedziałów całkowania nie jest ona efektywna.

Uwaga 2

Rozwiązanie znacznie upraszcza się, jeśli od początku wykorzysta się informację, że wspornik belki nie jest obciążony i $M_{g3}(x)=0$. Przemieszczenia wspornika są wynikiem jedynie jego obrotu na podporze. Można więc rozwiązanie ograniczyć do dwóch przedziałów i obliczając kąt obrotu na podporze 2

$$\theta_2=y_2'(3l)=-\frac{8}{9}\frac{ql^3}{EJ}$$

obliczyć przemieszczenie końca wspornika jako

$$y=\theta_2\cdot l=-\frac{8}{9}\frac{ql^4}{EJ},$$

gdyż z założenia małych przemieszczeń wynika przybliżenie $tg\theta\approx\theta$.