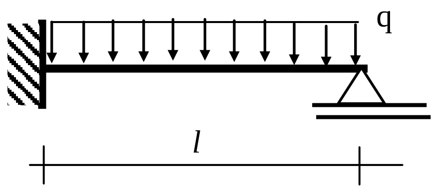
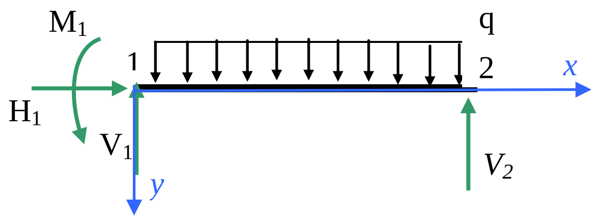
Przykład 5.3 Wyznaczenie równania linii ugięcia – metoda analityczna

Wyznaczyć linię ugięcia belki o podanym schemacie i stałej sztywności na zginanie EJ.



Rozwiązanie
Po uwolnieniu z więzów otrzymujemy schemat sił



Równanie momentów zginających:

$$M_g(x) = V_1\ x - M_1 - \frac{1}{2}qx^2\ .$$

Równanie różniczkowe osi ugiętej:

$$EJ\ \{y''(x) = -(V_1\ x - M_1 - \frac{1}{2}qx^2\ )$$

zawiera dwie niewiadome reakcje. Zależność między nimi wynika z równania równowagi

$$\sum M_{i2} = 0 \Rightarrow M_1 = V_1\ l - \frac{1}{2}ql^2$$

Zatem równanie różniczkowe linii ugięcia przyjmie postać

$$EJ\ \{y''(x) = -V_1\ x + V_1\ l - \frac{1}{2}ql^2 + \frac{1}{2}qx^2\ .$$

Całkując dwukrotnie powyższe równanie uzyskujemy

$$EJ\ y(x) = -\frac{1}{6}V_1\ x^3 + \frac{1}{2}V_1\ lx^2 - \frac{1}{4}ql^2x^2 + \frac{1}{24}qx^4 + C_1x + C_2 \qquad .$$

W równaniu występują 3 niewiadome: V_1 , C_1 i C_2, zatem do ich wyznaczenia potrzebne są 3 warunki brzegowe. W rozważanym zadaniu mają one postać

- ponieważ ugięcie oraz kąt obrotu w utwierdzeniu są zerowe to

$$y(0) = 0 \qquad (1)$$

$$y'(0) = 0 \qquad (2)$$

- ponieważ ugięcie na podporze jest zerowe to

$$y(l) = 0 \qquad (3).$$

Dla uzyskanej postaci rozwiązania prowadzi to do układu równań

$$(1)\ EJ\ y(0) = C_2$$

$$(2)\ EJ\ y'(0) = C_1$$

$$(3)\quad EJ\ y(l) = -\frac{1}{6}V_1\ l^3 + \frac{1}{2}V_1\ l^3 - \frac{1}{4}ql^4 + \frac{1}{24}ql^4 + C_1\ l + C_2$$

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = 0 \\ \frac{1}{3}V_1\, l^3 - \frac{5}{24}ql^4 + C_1\, l + C_2 = 0 \end{cases}$$

z którego otrzymujemy stałe: $C_1 = 0\,, C_2 = 0\,, V_1 = \frac{5}{8}ql$.

Ostatecznie równanie linii ugięcia przyjmuje postać:

$$y(x) = \frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{24}qx^4 - \frac{5}{48}ql\, x^3 + \frac{1}{16}q\, l^2x^2\right).$$

Znajomość $y(x)$ pozwala wyznaczyć siły wewnętrzne, które nie mogły być znalezione z warunków statycznych – równowagi.

$$M_g(x) = -EJ\ y''(x)\ \Rightarrow M_g(x) = -\frac{1}{8}ql^2 + \frac{5}{8}qlx - \frac{1}{2}qx^2$$

$$T(x) = -EJ\ y'''(x)\ \Rightarrow\quad T(x) = \frac{5}{8}ql - qx$$

Zadanie można również rozwiązać z wykorzystaniem równania różniczkowego

$$EJy^{IV}(x) = q(x).$$

Uwzględniając, że q(x) = q = *const*, po 4-krotnym całkowaniu uzyskamy równanie

$$EJ\ y(x) = \frac{1}{24}qx^4 + \frac{1}{6}C_1\ x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4\,.$$

Warunki brzegowe przemieszczeniowe (dotyczące przemieszczenia i kąta obrotu) należy teraz uzupełnić o warunki statyczne (dotyczące siły tnącej i momentu zginającego).

$$y(0) = 0 \qquad (1)$$

$$y'(0) = 0 \qquad (2)$$

$$y(l) = 0 \qquad (3)$$

$$M_g(l) = 0 \Rightarrow\ y''(l) = 0 \qquad (4)$$

Z otrzymanego układu równań

$$\begin{cases} C_4 = 0 \\ C_3 = 0 \\ \frac{1}{24}ql^4 + \frac{1}{6}C_1\, l^3 + \frac{1}{2}C_2l^2 + C_3l + C_4 = 0 \\ \frac{1}{6}q\, l^2 + C_1\, l + C_2 = 0 \end{cases}$$

wyznaczamy stałe $C_1 = -\frac{5}{8}ql\ \ , C_2 = \frac{1}{8}ql^2\ , C_3 = 0\,, C_4 = 0$.

Po podstawieniu otrzymujemy, jak poprzednio $y(x) = \frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{24}qx^4 - \frac{5}{48}ql\, x^3 + \frac{1}{16}q\, l^2x^2\right)$.

Wykres linii ugięcia belki