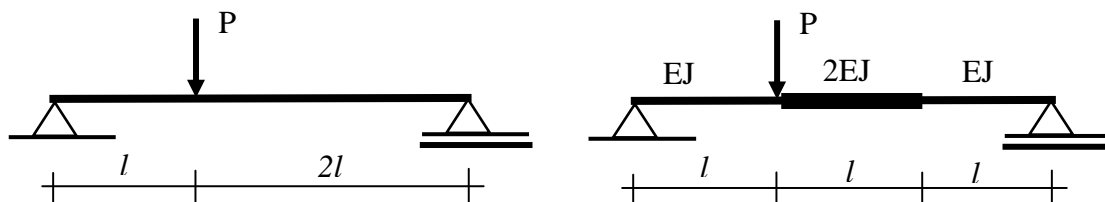


Przykład 5.4. Wyznaczenie ugięcia belki - metoda obciążeń wtórnych

Obliczyć ugięcie belki swobodnie podpartej w miejscu obciążenia jej siłą P .

Porównać ugięcie gdy:

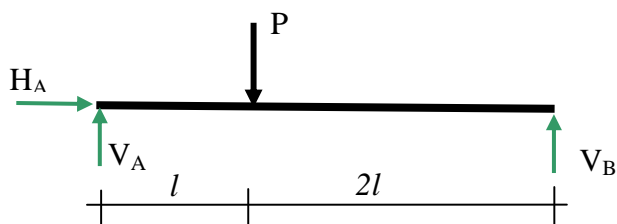
- belka ma stałą sztywność równą EJ
- belka została wzmocniona i w części środkowej jej sztywność wynosi $2EJ$.



Rozwiązanie

Do rozwiązania wykorzystamy metodę obciążeń wtórnych – Mohr'a. Metoda ta jest szczególnie efektywna, gdy wykres momentu zginającego jest liniowy i gdy poszukiwane są przemieszczenia w określonych miejscach.

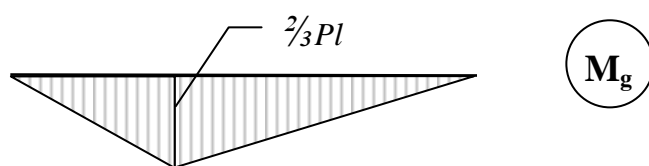
a) belka o stałej sztywności EJ



Po uwolnieniu z więzów i obliczeniu reakcji

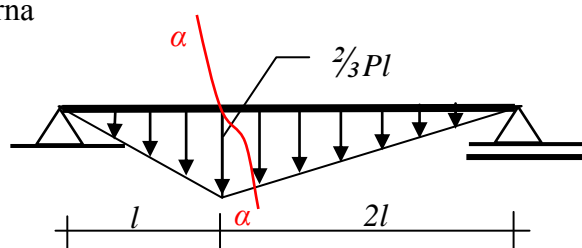
$$H_A = 0, V_A = \frac{2}{3}P, V_B = \frac{1}{3}P,$$

możemy sporządzić wykres momentu zginającego.

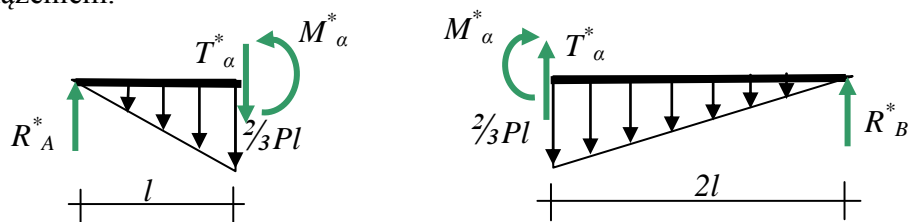


Wykres ten będzie stanowił obciążenie belki wtórnej (fikcyjnej). Obciążenie wtórne zwrot od osi belki do linii wykresu momentu gnącego, gdy wykres momentu rysowany jest po stronie włókien rozciąganych. Z warunku zerowania się ugięcia na podporze belki rzeczywistej wynika, że w tym miejscu belki wtórnej powinien zerować się moment zginający. Podparcie swobodne zapewnia spełnienie tego warunku. Zatem w schemacie belki wtórnej swobodne podparcia końców belki rzeczywistej zastępuje się takim samymi podporami belki wtórnej.

Belka wtórna



Poszukiwane ugięcie wyznacza się z wartości momentu wtórnego w przekroju $\alpha\text{-}\alpha$ – pod obciążeniem.



Rozważając równowagę tak wydzielonej części “lewej” belki otrzymujemy

$$M_{\alpha}^* = R_A^* l - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} Pl \cdot l \cdot \frac{1}{3} l$$

Reakcję R_A^* obliczamy z warunku równowagi całej belki wtórnej

$$\sum M_{iB} = 0 \Rightarrow R_A^* 3l - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} Pl \cdot l \cdot \left(2l + \frac{1}{3} l \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} Pl \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} \cdot 2l = 0; \quad R_A^* = \frac{5}{9} Pl^2.$$

Po podstawieniu do momentu mamy

$$M_{\alpha}^* = \frac{5}{9} Pl^3 - \frac{1}{9} \cdot Pl^3 = \frac{4}{9} Pl^3$$

Poszukiwane ugięcie wynosi zatem

$$y_{\alpha} = \frac{M_{\alpha}^*}{EJ} = \frac{4}{9} \frac{Pl^3}{EJ}.$$

Do sporządzenia szkicu linii ugięcia obliczmy jeszcze kąty ugięcia na podporach:

$$\theta_A = \frac{T_A^*}{EJ} = \frac{R_A^*}{EJ} = \frac{5}{9} \frac{Pl^2}{EJ}$$

$$\theta_B = \frac{T_B^*}{EJ} = -\frac{R_B^*}{EJ} = -\frac{4}{9} \frac{Pl^2}{EJ}, \quad \text{bo } R_B^* = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} Pl \cdot 3l - \frac{5}{9} Pl^2 = \frac{4}{9} Pl^2$$

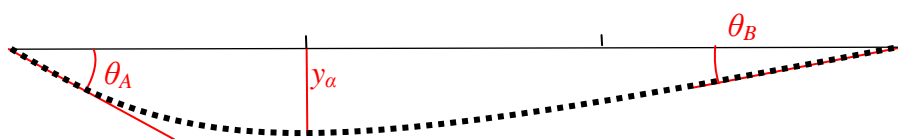
Sprawdźmy dodatkowo, czy y_{α} jest ugięciem maksymalnym.

W miejscu maksymalnego ugięcia wtórny moment gnący osiąga ekstremum, tzn., że siła tnąca wtórna w tym przekroju zeruje się. Obliczmy siłę tnącą T_{α}^*

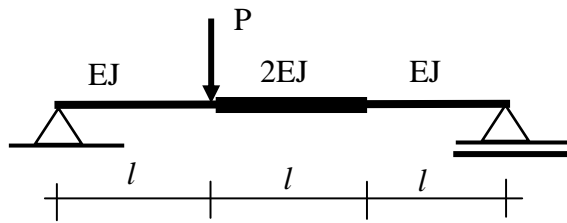
$$T_{\alpha}^* = \frac{5}{9} Pl^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} Pl \cdot l = \frac{2}{9} Pl^2 \neq 0.$$

Siła tnąca od wartości R_A^* maleje wraz ze wzrostem x . Oznacza to, że w przekroju $\alpha\text{-}\alpha$ nie zmalała jeszcze do zera i tym samym strzałka ugięcia przesunięta jest w prawo od siły P.

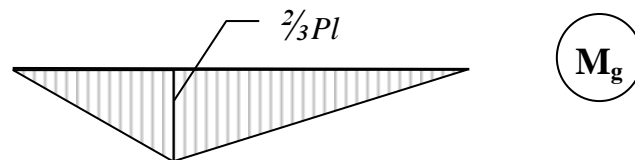
Rysując krzywą gładką styczną na podporach do zaznaczonych linii i przechodzącą przez wartość y_{α} uzyskujemy szkic linii ugięcia. Równanie tej linii jest równaniem momentu wtórnego – w dwóch przedziałach $(0, l)$ i $(l, 3l)$.



b) belka o zmiennej sztywności

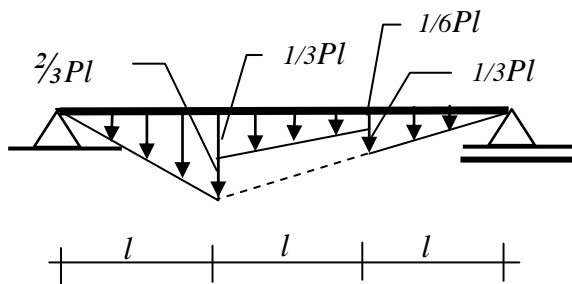


Podobnie jak poprzednio, posłużymy się metodą obciążeń wtórnych. Zmienna sztywność, która w metodzie analitycznej prowadzi do konieczności rozważenia trzech przedziałów całkowania, w metodzie Mohr'a nie wprowadza dodatkowych komplikacji. Ponieważ ugięcie zależy liniowo od obciążenia i $1/EJ$, to zmianę sztywności można uwzględnić redukując odpowiednio obciążenie. Wykres momentu zginającego (jak poprzednio) stanowiący obciążenie belki wtórnej należy zredukować proporcjonalnie do sztywności.

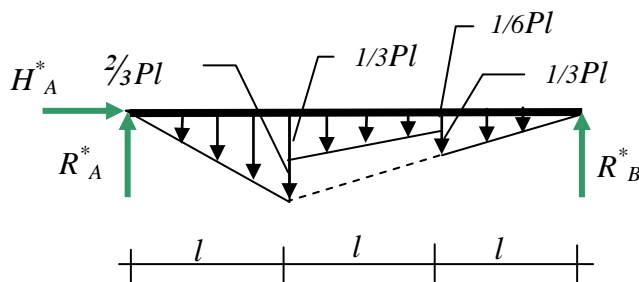


Przyjmując EJ jako sztywność porównawczą $EJ_p = EJ$ obciążenie wtórne w przedziałach o tej sztywności będzie tożsame z wykresem momentu zginającego $q^* = \frac{EJ_p}{EJ} M_g = M_g$. Natomiast w przedziale o większej sztywności obciążenie wtórne należy proporcjonalnie zmniejszyć $q^* = \frac{EJ_p}{2EJ} M_g = \frac{1}{2} M_g$

Belka wtórna o stałej sztywności $EJ_p = EJ$ jest zatem obciążona jak poniżej



Dalej postępujemy jak w poprzednio. Obliczamy reakcje wtórne



$$\sum M_{iB} = 0 \Rightarrow$$

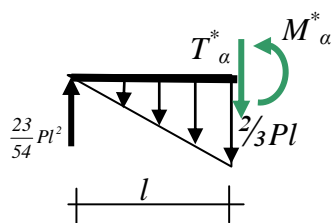
$$R_A^* 3l - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} Pl \cdot l \cdot \left(2l + \frac{1}{3}l\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} Pl \cdot l \cdot \left(l + \frac{2}{3}l\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} Pl \cdot l \cdot \left(l + \frac{1}{3}l\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} Pl \cdot l \cdot \frac{2}{3}l = 0;$$

$$R_A^* = \frac{23}{54} Pl^2$$

$$\sum P_{iy} = 0 \Rightarrow R_A^* - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} Pl \cdot l - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} Pl + \frac{1}{6} Pl\right) \cdot l - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} Pl \cdot l + R_B^* = 0; \quad R_B^* = \frac{35}{108} Pl^2$$

$$\sum P_{ix} = 0 \Rightarrow H_A^* = 0$$

Można już przejść od obliczenia wtórnego momentu gnącego w przekroju α - α .



$$M_\alpha^* = \frac{23}{54} Pl^2 \cdot l - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} Pl \cdot l \cdot \frac{1}{3}l = \frac{17}{54} Pl^3$$

Poszukiwane ugięcie wynosi zatem

$$y_\alpha = \frac{M_\alpha^*}{EJ_p} = \frac{17}{54} \frac{Pl^3}{EJ}$$

Do sporządzenia szkicu linii ugięcia obliczmy jeszcze kąty ugięcia na podporach:

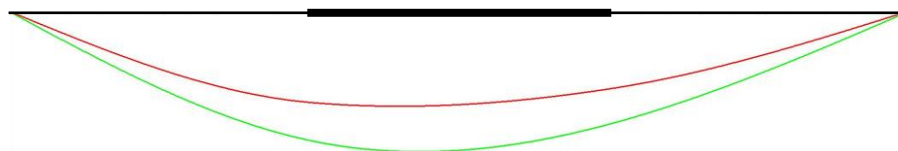
$$\theta_A = \frac{T_A^*}{EJ_p} = \frac{R_A^*}{EJ} = \frac{23}{54} \frac{Pl^2}{EJ}$$

$$\theta_B = \frac{T_B^*}{EJ_p} = -\frac{R_B^*}{EJ} = -\frac{35}{108} \frac{Pl^2}{EJ}$$

Szkic linii ugięcia



Zestawienie linii ugięcia belki o stałej sztywności EJ (zielony) i belki wzmocnionej (czerwony)



W wyniku wzmocnienia ugięcie belki w miejscu obciążenia zmniejszyło się z $\frac{24}{54} \frac{Pl^3}{EJ}$ do $\frac{17}{54} \frac{Pl^3}{EJ}$ czyli o ok. 30%.