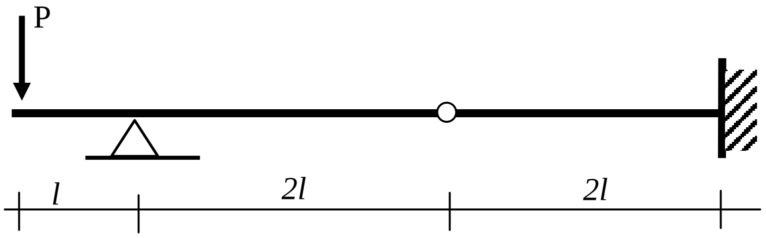
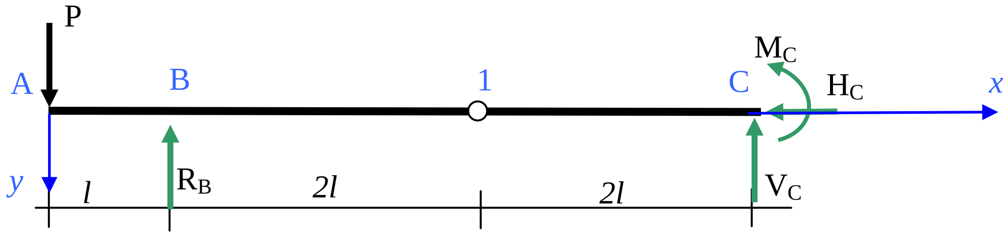
Przykład 5.5. Wyznaczenie linii ugięcia belki - metoda obciążeń wtórnych

Wyznaczyć linię ugięcia belki o podanym schemacie i stałej sztywności EJ. Obliczyć strzałkę ugięcia.



Rozwiązanie

Do rozwiązania wykorzystamy metodę obciążeń wtórnych – Mohr'a.



Po wyznaczeniu reakcji z warunków równowagi belki

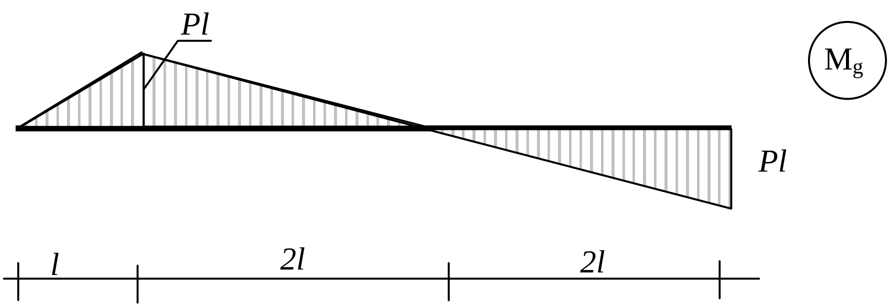
$$\sum M_{i1}^{l} = 0 \Rightarrow P3l - R_B 2l = 0; \qquad R_B = \frac{3}{2}P$$

$$\sum P_{iy} = 0 \Rightarrow -P + R_B + V_C = 0; \qquad V_C = -\frac{1}{2}P$$

$$\sum P_{ix} = 0 \Rightarrow \qquad H_C = 0$$

$$\sum M_{ic} = 0 \Rightarrow P5l - R_B 4l + M_C = 0; \qquad M_C = Pl$$

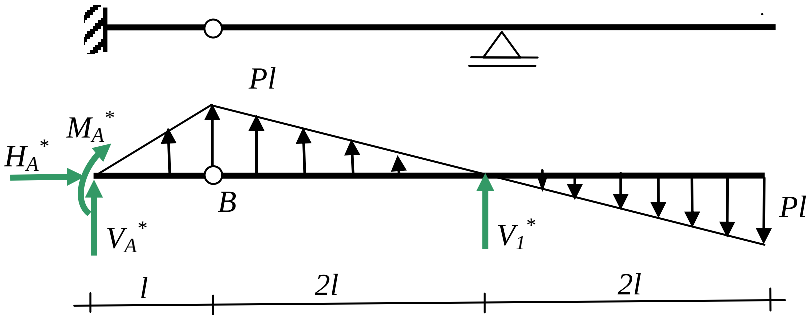
możemy sporządzić wykres momentu zginającego.



Wykres ten będzie stanowić obciążenie belki wtórnej (fikcyjnej). Schemat belki wtórnej budujemy zastępując:

- swobodny koniec belki rzeczywistej – utwierdzeniem belki wtórnej,
- swobodne podparcie belki rzeczywistej – przegubem w belce wtórnej,
- przegub pośredni w belce rzeczywistej – swobodnym podparciem belki wtórnej,
- utwierdzenie belki rzeczywistej – swobodnym końcem belki wtórnej.

Belka wtórna ma zatem schemat statyczny



Zwrot obciążenia wtórnego ustala się zgodnie ze znakiem momentu zginającego. W przedziałach dodatniego momentu (rozciągającego dolne włókna belki) – obciążenie skierowane zgodnie z osią y i przeciwnie do osi y, gdy moment jest ujemny.
Wyznaczenie ugięć belki rzeczywistej jest równoznaczne z wyznaczeniem momentu zginającego w belce wtórnej. Wyznaczamy najpierw reakcje z warunków równowagi.

$$\sum P_{ix} = 0 \Rightarrow H_A^* = 0$$

$$\sum M_{iB}^{p} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} Pl \cdot 2l \cdot \frac{1}{3} 2l + V_1^* \cdot 2l - \frac{1}{2} \cdot Pl \cdot 2l \cdot \left(2l + \frac{2}{3} \cdot 2l \right) = 0 \Rightarrow \quad V_1^* = \frac{4}{3} Pl^2$$

$$\sum P_{iy} = 0 \Rightarrow V_A^* + \frac{1}{2} Pl \cdot 3l + V_1^* - \frac{1}{2} \cdot Pl \cdot 2l = 0; \ \Rightarrow \ V_A^* = -\frac{11}{6} Pl^2$$

$$\sum M_{iB}^{l} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} Pl \cdot l \cdot \frac{1}{3} l + V_A^* \cdot l + M_A^* = 0; \quad \Rightarrow \quad M_A^* = \frac{5}{3} Pl^3$$

Wyznaczone wartości reakcji określają wartości przemieszczeń w punktach A i 1:

$$y_A = \frac{M_A^*}{EJ} = \frac{5}{3} \frac{Pl^3}{EJ}$$

$$\theta_A = \frac{T_A^*}{EJ} = \frac{V_A^*}{EJ} = -\frac{11}{6} \frac{Pl^2}{EJ}$$

$$\Delta\theta_1 = \frac{\Delta T_1^*}{EJ} = \frac{V_1^*}{EJ} = \frac{4}{3} \frac{Pl^2}{EJ}.$$

Dodatkowo można obliczyć:

- kąt obrotu na podporze B jako

$$\theta_B = \frac{T_B^*}{EJ} = -\frac{4}{3} \frac{Pl^2}{EJ} \ , \text{ ponieważ } T_B^* = \frac{1}{2} Pl \cdot l + V_A^* = -\frac{4}{3} \frac{Pl^2}{EJ} \ .$$

- przemieszczenie przegubu 1 jako

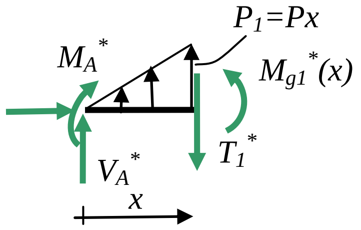
$$y_1 = \frac{M_1^*}{EJ} = -\frac{4}{3} \frac{Pl^3}{EJ} \ , \text{ ponieważ } M_1^* = -\frac{1}{2} Pl \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} \cdot 2l = -\frac{4}{3} \frac{Pl^3}{EJ}$$

- kąt obrotu po obu stronach przegubu 1 jako

$$\theta_1^l = \frac{T_1^{*l}}{EJ} = -\frac{1}{3} \frac{Pl^2}{EJ},$$

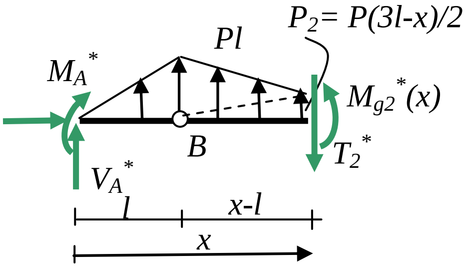
$$\theta_1^p = \frac{T_1^{*p}}{EJ} = \frac{Pl^2}{EJ}.$$

Równanie linii ugięcia uzyskamy zapisując równanie momentu wtórnego. Należy zapisać je dla trzech przedziałów.



$$x \in (0,l)$$

$$M^*_{g1}(x) = M^*_A + V^*_A \cdot x + \frac{1}{2} Px \cdot x \cdot \frac{1}{3} x = \frac{5}{3} Pl^3 - \frac{11}{6} Pl^2 x + \frac{1}{6} Px^3$$

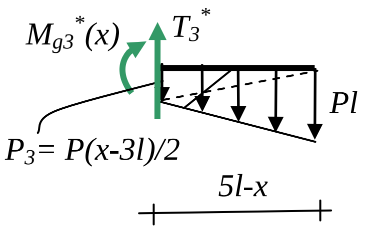


$$x \in (l,3l)$$

$$M^*_{g2}(x) = M^*_A + V^*_A \cdot x + \frac{1}{2} Pl \cdot l \cdot \left[\frac{1}{3} l + (x-l)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2} Pl \cdot (x-l) \frac{2}{3} (x-l) + \frac{1}{2} P_2 \cdot (x-l) \frac{1}{3} (x-l) =$$

$$= -\frac{1}{12} Px^3 + \frac{3}{4} Plx^2 - \frac{31}{12} Pl^2 x + \frac{23}{12} Pl^3$$



$$x \in (3l,5l)$$

$$M^*_{g3}(x) = -\frac{1}{2} Pl \cdot (5l-x) \cdot \frac{2}{3} (5l-x) - \frac{1}{2} P_3 \cdot (5l-x) \cdot \frac{1}{3} (5l-x) =$$

$$= -\frac{1}{12} Px^3 + \frac{3}{4} Plx^2 - \frac{5}{4} Pl^2 x - \frac{25}{12} Pl^3$$

Ostatecznie równanie linii ugięcia ma postać

$$x \in (0,l) \qquad y_1(x) = \frac{M^*_{g1}(x)}{EJ} = \frac{1}{EJ}\left[\frac{1}{6} Px^3 - \frac{11}{6} Pl^2 x + \frac{5}{3} Pl^3\right]$$

$$x \in (l,3l) \qquad y_2(x) = \frac{M^*_{g2}(x)}{EJ} = \frac{1}{EJ}\left[-\frac{1}{12} Px^3 + \frac{3}{4} Plx^2 - \frac{31}{12} Pl^2 x + \frac{23}{12} Pl^3\right]$$

$$x \in (3l,5l) \qquad y_3(x) = \frac{M^*_{g3}(x)}{EJ} = \frac{1}{EJ}\left[-\frac{1}{12} Px^3 + \frac{3}{4} Plx^2 - \frac{5}{4} Pl^2 x - \frac{25}{12} Pl^3\right]$$

Wyznaczone równania i wielkości pozwalają naszkicować linię ugięcia belki.