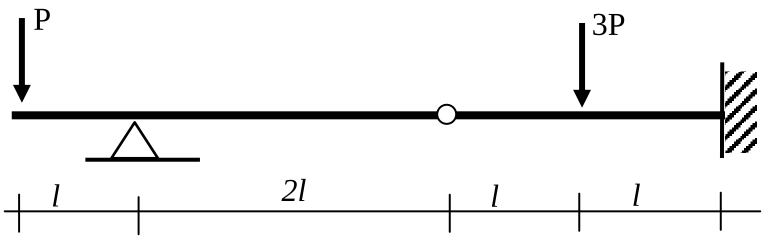
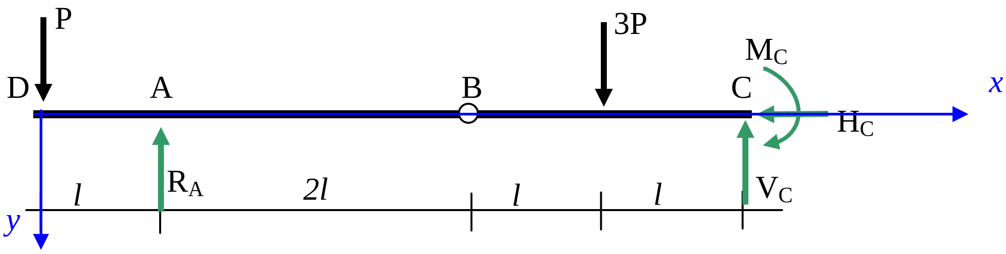
Przykład 5.6. Wyznaczenie linii ugięcia belki - metoda obciążeń wtórnych

Wyznaczyć linię ugięcia belki o podanym schemacie i stałej sztywności EJ. Obliczyć strzałkę ugięcia.



Rozwiązanie

Do rozwiązania wykorzystamy metodę obciążeń wtórnych – Mohr'a.



Po wyznaczeniu reakcji

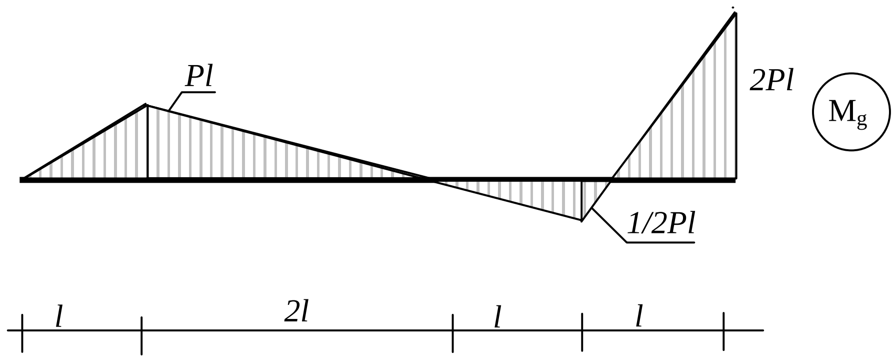
$$\sum M_{iB}^{l} = 0 \Rightarrow P3l - R_A 2l = 0; \qquad R_A = \frac{3}{2}P$$

$$\sum P_{iy} = 0 \Rightarrow -P - R_A + 3P - V_C = 0; \qquad V_C = \frac{5}{2}P$$

$$\sum P_{ix} = 0 \Rightarrow \qquad H_C = 0$$

$$\sum M_{ic} = 0 \Rightarrow P5l - R_A 4l + 3Pl - M_C = 0; M_C = 2Pl$$

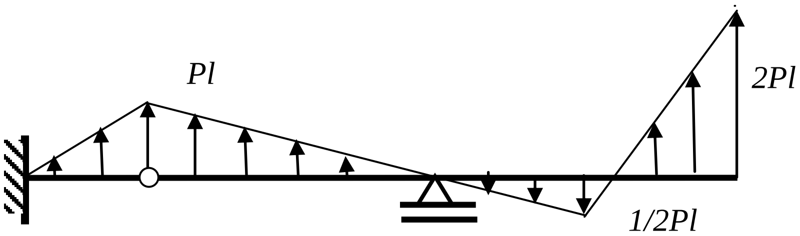
możemy sporządzić wykres momentu zginającego.



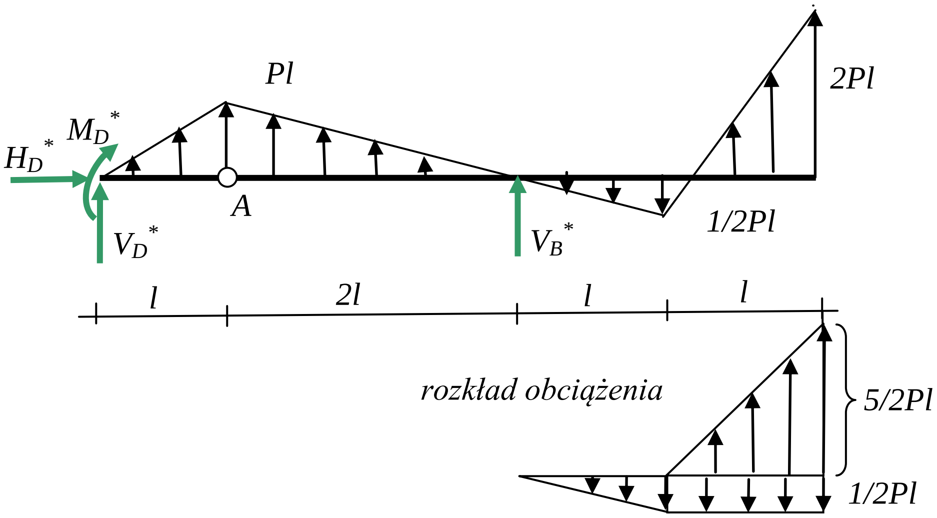
Wykres ten będzie stanowić obciążenie belki wtórnej (fikcyjnej). Schemat belki wtórnej budujemy zastępując:

- swobodny koniec belki rzeczywistej – utwierdzeniem belki wtórnej,
- swobodne podparcie belki rzeczywistej – przegubem w belce wtórnej,
- przegub pośredni w belce rzeczywistej – swobodnym podparciem belki wtórnej,

- utwierdzenie belki rzeczywistej – swobodnym końcem belki wtórnej.
Belka wtórna ma zatem schemat statyczny



Znak obciążenia wtórnego ustala się zgodnie ze znakiem momentu zginającego. W przedziałach dodatniego momentu (rozciągającego dolne włókna belki) – obciążenie skierowane zgodnie z osią y , a przeciwnie do osi y, gdy moment jest ujemny.
Wyznaczenie ugięć belki rzeczywistej jest równoznaczne z wyznaczeniem momentu zginającego w belce wtórnej podzielonemu przez sztywność belki na zginanie EJ. Wyznaczamy najpierw z warunków równowagi reakcje belki wtórnej.



$$\sum P_{ix} = 0 \Rightarrow H_D^* = 0$$

$$\sum M_{iA}^{p} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}Pl \cdot 2l \cdot \frac{1}{3}2l + V_B^* \cdot 2l - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}Pl \cdot l \cdot \left(2l + \frac{2}{3}l\right) - \frac{1}{2}Pl \cdot l \cdot \left(3l + \frac{1}{2}l\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2}Pl \cdot l \cdot \left(3l + \frac{2}{3}l\right) = 0;$$

$$\Rightarrow \quad V_B^* = -\frac{17}{12}Pl^2$$

$$\sum P_{iy} = 0 \Rightarrow V_D^* + \frac{1}{2}Pl \cdot 3l + V_B^* - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}Pl \cdot l - \frac{1}{2}Pl \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2}Pl \cdot l = 0; \quad \Rightarrow \quad V_D^* = -\frac{7}{12}Pl^2$$

$$\sum M_{iA}^{l} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}Pl \cdot l \cdot \frac{1}{3}l + V_D^* \cdot l + M_D^* = 0; \quad \Rightarrow \quad M_D^* = \frac{5}{12}Pl^3$$

Wyznaczone wartości reakcji określają wartości przemieszczeń w punktach D i B:

$$y_D = \frac{M_D^*}{EJ} = \frac{5}{12}\frac{Pl^3}{EJ}$$

$$\theta_D = \frac{T_D^*}{EJ} = \frac{V_D^*}{EJ} = -\frac{7}{12}\frac{Pl^2}{EJ}$$

$$\Delta\theta_B = \frac{\Delta T_B^*}{EJ} = \frac{V_B^*}{EJ} = -\frac{17}{12}\frac{Pl^2}{EJ}.$$

Dodatkowo można obliczyć:

- kąt obrotu na podporze A jako

$$\theta_A = \frac{T_A^*}{EJ} = -\frac{1}{12}\frac{Pl^2}{EJ} \quad \text{, ponieważ} \quad T_A^* = \frac{1}{2}Pl\cdot l + V_D^* = -\frac{1}{12}\frac{Pl^2}{EJ} \quad .$$

- przemieszczenie przegubu B jako

$$y_B = \frac{M_B^*}{EJ} = \frac{7}{6}\frac{Pl^3}{EJ},$$

ponieważ $M_B^* = V_D^*\cdot 3l + M_D^* + \frac{1}{2}Pl\cdot l\cdot\left(2l+\frac{1}{3}l\right) + \frac{1}{2}Pl\cdot 2l\cdot\frac{2}{3}\cdot 2l = \frac{7}{6}\frac{Pl^3}{EJ}$

- kąt obrotu w przegubie B jako

$$\theta_B^l = \frac{T_B^{*l}}{EJ} = \frac{11}{12}\frac{Pl^2}{EJ},$$

$$\theta_B^p = \frac{T_B^{*p}}{EJ} = -\frac{1}{2}\frac{Pl^2}{EJ}.$$

Wielkości te pozwalają naszkicować linię ugięcia belki.