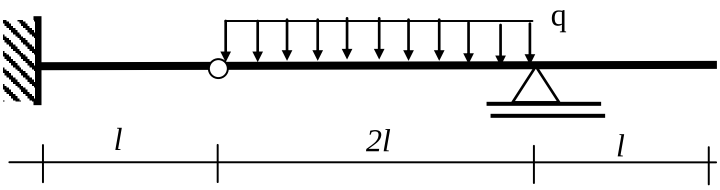
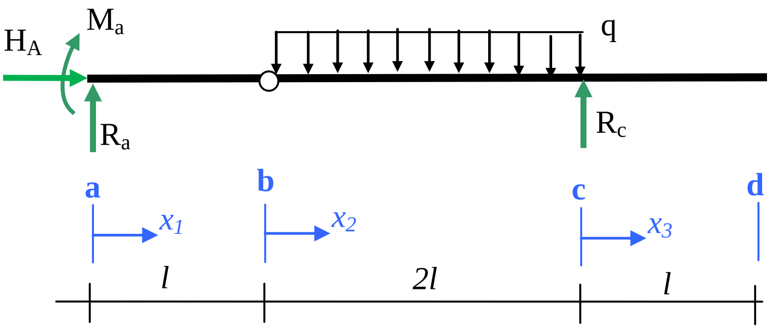
Przykład 5.8. Wyznaczenie linii ugięcia belki – metoda parametrów początkowych

Wyznaczyć linię ugięcia belki o podanym schemacie statycznym i stałej sztywności EJ.



Rozwiązanie

Do rozwiązania wykorzystana zostanie metoda parametrów początkowych.



Z warunków równowagi wyznaczamy reakcje

$$M_a = -ql^2\ ,\ R_a = ql\ ,\ R_c = ql\ ,\ H_A = 0.$$

Równanie linii ugięcia w przedziale a-b ma postać

$$y(x_1) = y_a + \theta_a x - \frac{M_a}{2EJ}x_1^2 - \frac{T_a}{6EJ}x_1^3 + \frac{q_a}{24EJ}x_1^4\ .$$

Ponieważ parametry początkowe dla przedziału a-b wynoszą:

$$y_a = 0\ ,\theta_a = 0\ ,M_a = -ql^2\ ,T_a = ql\ ,q_a = 0\ ,$$

równanie linii ugięcia w tym przedziale redukuje się do postaci

$$y(x_1) = -\frac{\left(-ql^2\right)}{2EJ}x_1^2 - \frac{ql}{6EJ}x_1^3\ .$$

Równanie linii ugięcia w przedziale b-c ma postać

$$y(x_2) = y(x_1) + \Delta y_b + \Delta\theta_b x_2 - \frac{\Delta M_b}{2EJ}x_2{}^2 - \frac{\Delta T_b}{6EJ}x_2{}^3 + \frac{\Delta q_b}{24EJ}x_2{}^4\ .$$

Od punktu „b" działa na belkę obciążenie ciągłe, a przegub w tym punkcie powoduje jedynie zmianę kąta ugięcia, zatem parametry początkowe dla tego przedziału wynoszą:

$$\Delta q_b = q\ ,\Delta y_b = 0\ ,\Delta M_b = 0\ ,\Delta T_b = 0\ ,oraz\ \Delta\theta_b \neq 0\ ,$$

i równanie linii ugięcia redukuje się do postaci

$$y(x_2) = y(x_1) + \Delta\theta_b x_2 + \frac{q}{24EJ}x_2{}^4\ .$$

Równanie linii ugięcia w przedziale c-d ma postać

$$y(x_3) = y(x_2) + \Delta y_c + \Delta\theta_c x_3 - \frac{\Delta M_c}{2EJ} x_{3^2} - \frac{\Delta T_c}{6EJ} x_{3^3} + \frac{\Delta q_c}{24EJ} x_{3^4} \,.$$

Ponieważ obciążenie ciągłe q kończy się w punkcie „c”, konieczne jest wprowadzenie od punktu „c” obciążenia –q, redukującego działanie obciążenia q na wsporniku. Parametry początkowe dla przedziału c-d wynoszą

$$\Delta y_c = 0 \,, \Delta\theta_c = 0 \,, \Delta M_c = 0 \,, \Delta T_c = ql \,, \Delta q_b = -q \,,$$

Zatem równanie linii ugięcia w tym przedziale przyjmuje postać

$$y(x_3) = y(x_2) - \frac{ql}{6EJ} x_3^3 + \frac{(-q)}{24EJ} x_3^4 \,.$$

Uwzględniając, że $x_2 = x_1 - l$, $x_3 = x_1 - 3l$, równanie linii ugięcia można zapisać następująco

$$y(x_1) = \frac{ql^2}{2EJ} x_1^2 - \frac{ql}{6EJ} x_1^3 \Bigg|_b + \Delta\theta_b (x_1 - l) + \frac{q}{24EJ} (x_1 - l)^4 \Bigg|_c - \frac{ql}{6EJ} (x_1 - 3l)^3 - \frac{q}{24EJ} (x_1 - 3l)^4 \Bigg|_d$$

Występującą w równaniu nieznaną wielkość $\Delta\theta_b$ można wyznaczyć z warunku podparcia w punkcie „c”. Warunek geometryczny $y(3l) = 0$ przyjmuje postać

$$\frac{ql^2}{2EJ} (3l)^2 - \frac{ql}{6EJ} (3l)^3 \Bigg|_b + \Delta\theta_b \, 2l + \frac{q}{24EJ} (2l)^4 \Bigg|_c = 0$$

a stąd $\Delta\theta_b = -\dfrac{ql^3}{3EJ}$.

Ostatecznie równanie linii ugięcia ma postać

$$y(x_1) = \frac{ql^2}{2EJ} x_1^2 - \frac{ql}{6EJ} x_1^3 \Bigg|_b - \frac{ql^3}{3EJ} (x_1 - l) + \frac{q}{24EJ} (x_1 - l)^4 \Bigg|_c - \frac{ql}{6EJ} (x_1 - 3l)^3 - \frac{q}{24EJ} (x_1 - 3l)^4 \Bigg|_d$$

co pozwala obliczyć wartości charakterystyczne wykresu linii ugięcia i naszkicować ją.

$$y_b = \frac{ql^4}{3EJ} \,, \theta_b^l = \frac{ql^3}{2EJ} \,, \theta_b^p = \frac{ql^3}{6EJ} \,,$$

$$\theta_c = -\frac{ql^3}{2EJ} \,,$$

$$y_d = -\frac{ql^4}{2EJ} \,, \theta_d = \theta_c \,.$$