Przykład 6.1. Przestrzenny stan naprężenia i odkształcenia

Stan naprężenia

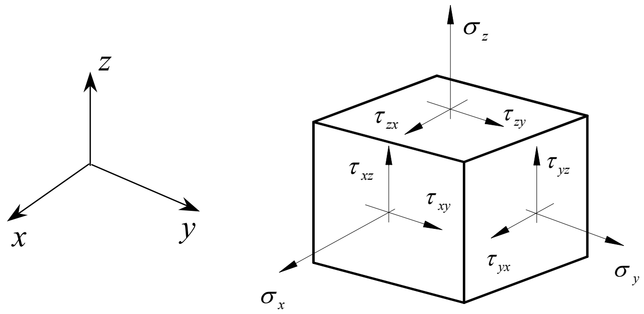
Stan naprężenia w punkcie jest określony za pomocą dziewięciu składowych, które oznaczamy literą σ z odpowiednimi indeksami. Pierwszy indeks oznacza normalną zewnętrzną do przekroju, w którym działa naprężenie, zaś drugi – kierunek naprężenia. W wytrzymałości materiałów, dla odróżnienia naprężeń stycznych stosuje się literę τ, natomiast powtarzający się indeks w oznaczeniu naprężeń normalnych pomija się. Zgodnie z twierdzeniem o wzajemności naprężeń stycznych zachodzą równości: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$. Mamy zatem 6 niezależnych składowych stanu naprężenia, które zapisujemy jako:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \qquad \text{lub} \qquad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{x} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{y} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{z} \end{bmatrix}$$

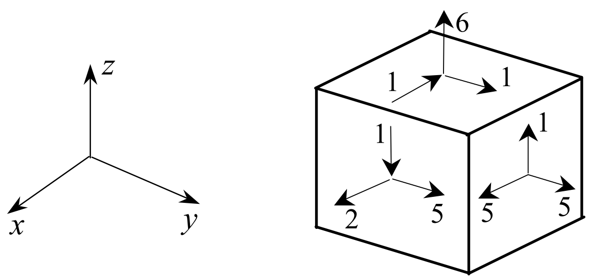
Przyjmuje się następujące zasady znakowania składowych stanu naprężenia:

- Naprężenie normalne jest dodatnie, gdy jest skierowane na zewnątrz przekroju („od przekroju”), tzn. jest rozciągające.
- Umowę znaków dla naprężenia stycznego wyjaśnimy na przykładzie naprężenia τ_{xy}. Działa ono w przekroju prostopadłym do osi *x*, wzdłuż osi *y*. W przekroju o normalnej zewnętrznej zgodnej ze zwrotem osi *x* naprężenie τ_{xy} jest dodatnie, gdy ma zwrot zgodny z osią *y*. Natomiast w przeciwległym przekroju (o ujemnej normalnej zewnętrznej) naprężenie τ_{xy} jest dodatnie, gdy ma zwrot przeciwny do osi *y*.

Aby zilustrować na rysunku stan naprężenia w danym punkcie, należy przeprowadzić przez ten punkt trzy przekroje prostopadłe do przyjętego układu osi *xyz*. Narysowanie wszystkich składowych stanu naprężenia dosłownie „w punkcie” byłoby nieczytelne, dlatego prowadzimy przekroje w jego nieskończenie małym otoczeniu (rysujemy prostopadłościan – „kostkę”).
Na poniższym rysunku zaznaczono dodatnie zwroty odpowiednich naprężeń.



Przykładowo, dla poniższego stanu naprężenia ilustracja graficzna jest następująca:



$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 5 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \text{[MPa]}$$

Uwaga:

Zadania 1, 2, i 3 dotyczą wyznaczania wartości głównych i kierunków głównych przestrzennego stanu naprężenia. Dla stanu odkształcenia zagadnienie to rozwiązuje się analogicznie. Wystarczy zastąpić składowe stanu naprężenia odpowiednimi składowymi stanu odkształcenia.

ZADANIE 1. Obliczyć wartości naprężeń głównych oraz określić kierunki główne stanu naprężenia:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 5 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}$$

Rozwiązanie

Obliczamy wartości niezmienników stanu naprężenia.

$$s_{\mathrm{I}} = \sigma_x + \sigma_x + \sigma_z = 2 + 5 + 6 = 13 \text{ MPa}$$

$$s_{\mathrm{II}} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2 + \sigma_y\sigma_z - \tau_{yz}^2 + \sigma_z\sigma_x - \tau_{zx}^2$$

$$= 2\cdot 5 - 5^2 + 5\cdot 6 - 1^2 + 2\cdot 6 - (-1)^2 = 25 \text{ MPa}^2$$

$$s_{\mathrm{III}} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + \tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} + \tau_{xz}\tau_{yx}\tau_{zy} - \tau_{xz}\sigma_y\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}\tau_{zy} - \tau_{xy}\tau_{yx}\sigma_z$$

$$= 2\cdot 5\cdot 6 + 2\cdot 1(-1) + (-1)\cdot 5\cdot 1 - (-1)\cdot(-1)\cdot 5 - 1\cdot 1\cdot 2 - 6\cdot 5\cdot 5 = -107 \text{ MPa}^3$$

Naprężenia główne wyznaczamy z równania

$$\sigma^3 - s_{\mathrm{I}}\,\sigma^2 + s_{\mathrm{II}}\,\sigma - s_{\mathrm{III}} = 0 \ ,$$

które po wstawieniu obliczonych wartości liczbowych niezmienników ma postać

$$\sigma^3 - 13\sigma^2 + 25\sigma + 107 = 0 \ . \tag{1}$$

Aby otrzymać wartości naprężeń głównych należy rozwiązać powyższe równanie trzeciego stopnia.

Rozwiązanie równania trzeciego stopnia w postaci ogólnej

Niech będzie dane równanie trzeciego stopnia w postaci

$$ay^3 + by^2 + cy + d = 0 .$$

Dzielimy je obustronnie przez a i podstawiamy $y = x - b/3a$; otrzymujemy:

$$x^3 + 3px + 2q = 0 ,$$

gdzie

$$3p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}\,; \qquad 2q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}\ .$$

Obliczamy wyróżnik

$$\Delta = q^2 + p^3\ .$$

Jeżeli $\Delta < 0$ oraz $p < 0$ to nasze równanie trzeciego stopnia ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste. Pierwiastki x_1, x_2, x_3 obliczamy ze wzorów:

$$x_1 = -2r\cos\tfrac{1}{3}\varphi\,,$$

$$x_2 = 2r\cos(60^\circ - \tfrac{1}{3}\varphi)\,,$$

$$x_3 = 2r\cos(60^\circ + \tfrac{1}{3}\varphi)\,,$$

gdzie

$$\cos\varphi = \frac{q}{r^3}\ , \quad r = \eta\sqrt{|\,p\,|}\ , \quad \eta = \operatorname{sgn}(q) \quad (\eta = \pm 1 \text{ zależnie od znaku } q).$$

Zatem pierwiastki rozważanego równania trzeciego stopnia wynoszą

$$y_1 = x_1 - \frac{b}{3a}\ , \quad y_2 = x_2 - \frac{b}{3a}\ , \quad y_3 = x_3 - \frac{b}{3a}\,.$$

Rozwiążemy teraz równanie (1), korzystając z powyższego sposobu. Obliczamy:

$$a = 1\ , \quad b = -13\ , \quad c = 25\ , \quad d = 107\ ,$$

$$3p = \frac{3ac - b^2}{3a^2} = \frac{3\cdot 1\cdot 25 - (-13)^2}{3\cdot 1^2} = -31{,}3 < 0\ ,$$

$$2q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} = \frac{2\cdot(-13)^3}{27\cdot 1^3} - \frac{(-13)\cdot 25}{3\cdot 1^2} + \frac{107}{1} = -162{,}7 + 108{,}3 + 107 = 52{,}6$$

$$\Delta = q^2 + p^3 = \left(\frac{52{,}6}{2}\right)^2 + \left(\frac{-31{,}3}{3}\right)^3 = -447{,}6 < 0$$

$$\eta = \operatorname{sgn}(q) = +1\ , \quad r = \eta\sqrt{|\,p\,|} = +1\cdot\sqrt{\frac{31{,}3}{3}} = 3{,}23\ , \quad \cos\varphi = \frac{q}{r^3} = \frac{\frac{52{,}6}{2}}{3{,}23^3} = 0{,}780 \Rightarrow \varphi = 38{,}7$$

$$x_1 = -2r\cos\tfrac{1}{3}\varphi = -2\cdot 3{,}23\cdot\cos\left(\tfrac{38{,}7^\circ}{3}\right) = -6{,}30$$

$$x_2 = 2r\cos(60^\circ - \tfrac{1}{3}\varphi) = -2\cdot 3{,}23\cdot\cos\left(60^\circ - \tfrac{38{,}7^\circ}{3}\right) = 4{,}40$$

$$x_3 = 2r\cos(60^\circ + \tfrac{1}{3}\varphi) = -2\cdot 3{,}23\cdot\cos\left(60^\circ + \tfrac{38{,}7^\circ}{3}\right) = 1{,}90$$

Zatem naprężenia główne wynoszą:

$$x_1 - \frac{b}{3a} = -6{,}30 - \frac{-13}{3\cdot 1} = \underline{\underline{-1{,}97 = \sigma_3}}\ \text{[MPa]}$$

$$x_2 - \frac{b}{3a} = 4{,}40 - \frac{-13}{3\cdot 1} = \underline{\underline{8{,}74 = \sigma_1}}\ \text{[MPa]}$$

$$x_3 - \frac{b}{3a} = 1{,}90 - \frac{-13}{3\cdot 1} = \underline{\underline{6{,}23 = \sigma_2}}\ \text{[MPa]}$$

Kontrolą prawidłowości obliczeń może być sprawdzenie niezmienników:

$$s_{\text{I}} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 8{,}74 + 6{,}23 - 1{,}97 = 13\ \text{MPa}$$

$$s_{\text{II}} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 =$$

$$= 8{,}74\cdot 6{,}23 + 8{,}74\cdot(-1{,}97) + 6{,}23\cdot(-1{,}97) = 25{,}0\ \ \text{MPa}^2$$

$$s_{\text{III}} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8{,}74 & 0 & 0 \\ 0 & 6{,}23 & 0 \\ 0 & 0 & -1{,}97 \end{vmatrix} = 8{,}74\cdot 6{,}23\cdot(-1{,}97) = -107\ \text{MPa}^3$$

Wartości niezmienników są zgodne z otrzymanymi poprzednio.

Wyznaczamy teraz kierunki główne.

Kierunek główny *1*, czyli kierunek działania naprężenia σ_1, określony jest przez kosinusy kierunkowe l_1 , m_1 , n_1. Są to kosinusy kątów jakie tworzy wektor naprężenia σ_1, z osiami układu współrzędnych *Ox, Oy, Oz*. Liczby l_1 , m_1 , n_1 są zatem składowymi jednostkowego wektora zewnętrznie normalnego do przekroju, w którym występuje naprężenie σ_1. Prawdziwy jest zatem związek:

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1\ .$$

Kosinusy kierunkowe l_1 , m_1 , n_1 obliczamy z układu równań:

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_1)\,l_1 + \tau_{yx}m_1 + \tau_{zx}n_1 = 0 \\ \tau_{xy}l_1 + (\sigma_y - \sigma_1)\,m_1 + \tau_{zy}n_1 = 0 \\ \tau_{xz}l_1 + \tau_{yz}m_1 + (\sigma_x - \sigma_1)\,n_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2 - 8{,}74)\,l_1 + 5m_1 - n_1 = 0 & (2) \\ 5l_1 + (5 - 8{,}74)\,m_1 + n_1 = 0 & (3) \\ -l_1 + m_1 + (6 - 8{,}74)\,n_1 = 0 & (4) \end{cases}$$

Wyznacznik macierzy głównej tego układu jest równy zeru. Obliczamy rząd tej macierzy. W tym celu wybieramy z niej dowolny minor drugiego stopnia (3-1=2) i sprawdzamy czy jest on różny od zera.

$$\left[\begin{array}{cc|c} -6{,}74 & 5 & -1 \\ \hline 5 & -3{,}74 & 1 \\ -1 & 1 & -2{,}74 \end{array}\right] \qquad \begin{vmatrix} 5 & -3{,}74 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 3{,}74 \neq 0$$

Nasz układ ma zatem rozwiązania zależne od jednego parametru. Badany minor obejmował współczynniki przy niewiadomych l_1 i m_1 w równaniach (3) i (4). Rozwiązujemy teraz układ dwóch równań (3) i (4) względem niewiadomych l_1 i m_1. Otrzymujemy:

$$m_1 = 10{,}1\,n_1\ , \qquad l_1 = 7{,}34\,n_1$$

Uwzględniając warunek

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \qquad 10{,}1^2 \cdot n_1^2 + 7{,}34^2 \cdot n_1^2 + n_1^2 = 1,$$

otrzymujemy kosinusy kierunkowe pierwszego kierunku głównego:

$$\underline{\underline{n_1 = \pm 0.0803}} \text{ oraz } \underline{\underline{l_1 = \pm 0.586,\ m_1 = \pm 0.806}}\ .$$

Dla drugiego kierunku głównego rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_2) l_2 + \tau_{yx} m_2 + \tau_{zx} n_2 &= 0 \\ \tau_{xy} l_2 + (\sigma_y - \sigma_2) m_2 + \tau_{zy} n_2 &= 0 \\ \tau_{xz} l_2 + \tau_{yz} m_2 + (\sigma_x - \sigma_2) n_2 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (2 - 6{,}23) l_1 + 5 m_1 - n_1 = 0 & (5) \\ 5 l_1 + (5 - 6{,}23) m_1 + n_1 = 0 & (6) \\ - l_1 + m_1 + (6 - 6{,}23) n_1 = 0 & (7) \end{cases}$$

Wybieramy dowolny minor drugiego stopnia z macierzy głównej układu i sprawdzamy czy jest on różny od zera:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -4{,}23 & 5 & -1 \\ 5 & -1{,}23 & 1 \\ \hline -1 & 1 & -0{,}23 \end{array}\right] \qquad \begin{vmatrix} -4{,}23 & 5 \\ 5 & -1{,}23 \end{vmatrix} = 4{,}23 \cdot 1{,}23 - 25 \neq 0$$

Badany minor obejmował współczynniki przy niewiadomych l_1 i m_1 w równaniach (5) i (6). Zatem, rozwiązujemy teraz układ dwóch równań (5) i (6) względem niewiadomych l_1 i m_1. Otrzymujemy:

$$m_2 = 0{,}0389\, n_2 \ , \qquad l_2 = -0{,}190\, n_2$$

dołączając warunek

$$l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1, \qquad 0{,}0389^2 \cdot n_2^2 + (-0{,}190)^2 \cdot n_2^2 + n_2^2 = 1\ ,$$

otrzymujemy kosinusy kierunkowe drugiego kierunku głównego:

$$\underline{\underline{n_2 = \pm 0.982}} \text{ oraz } \underline{\underline{l_2 = \mp 0{,}187,\ m_2 = \pm 0.0382}}\ .$$

Podobnie, obliczamy składowe trzeciego kierunku głównego. Wynoszą one:

$$\underline{\underline{n_3 = \pm 0{,}173}} \text{ oraz } \underline{\underline{l_3 = \pm 0{,}788,\ m_3 = \mp 0.591}}\ .$$

Kierunki główne określone jednostkowymi wektorami $\vec{\mu}_1 = [l_1, m_1, n_1]$, $\vec{\mu}_2 = [l_2, m_2, n_2]$, $\vec{\mu}_3 = [l_3, m_3, n_3]$ muszą być względem siebie parami prostopadłe. Sprawdzenie tego warunku jest dobrym sposobem kontroli poprawności obliczeń. Dla każdej pary zapisujemy warunek wynikający z definicji iloczynu skalarnego:

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0{,}586 \cdot (-0{,}187) + 0{,}806 \cdot 0{,}0382 + 0{,}0803 \cdot 0{,}982 = 6{,}18 \cdot 10^{-5} \cong 0 \ \checkmark$$

$$l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 = -0{,}187 \cdot 0{,}788 + 0{,}0382 \cdot (-0{,}591) + 0{,}982 \cdot 0{,}173 = -4{,}62 \cdot 10^{-5} \cong 0 \ \checkmark$$

$$l_3 l_1 + m_3 m_1 + n_3 n_1 = 0{,}788 \cdot 0{,}586 - 0{,}591 \cdot 0{,}806 + 0{,}173 \cdot 0{,}0803 = -6{,}86 \cdot 10^{-4} \cong 0 \ \checkmark$$

Wartości iloczynów skalarnych poszczególnych par wektorów nie są dokładnie równe zeru z uwagi na błędy zaokrągleń powstałe w obliczeniach. Są one jednak bardzo małe w stosunku do długości wektorów równej 1. Wykazaliśmy więc, że znalezione kierunki główne są względem siebie parami prostopadłe.

ZADANIE 2. Znaleźć naprężenia główne i kierunki główne stanu naprężenia

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ [MPa] } .$$

Rozwiązanie

Obliczamy wartości niezmienników stanu naprężenia.

$$s_{\mathrm{I}} = \sigma_x + \sigma_x + \sigma_z = 1 + 1 + 1 = 3 \text{ MPa}$$

$$s_{\mathrm{II}} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 1^2 + 1 \cdot 1 - 1^2 + 1 \cdot 1 - 1^2 = 0$$

$$s_{\mathrm{III}} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = 1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 = 0$$

Naprężenia główne wyznaczamy z równania

$$\sigma^3 - \sigma^2 s_{\mathrm{I}} + \sigma s_{\mathrm{II}} - s_{\mathrm{III}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma^3 - 3\sigma^2 = 0$$

Skąd łatwo obliczamy

$$\underline{\underline{\sigma_1 = 3 \text{ MPa}}} \ , \qquad \underline{\underline{\sigma_2 = \sigma_3 = 0}} \ .$$

Jest to zatem przypadek rozciągania naprężeniem $\sigma_1 = 3$. Jego kierunek wyznaczymy z układu równań:

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_1)\, l_1 + \tau_{yx} m_1 + \tau_{zx} n_1 &= 0 & & (1-3)\, l_1 + m_1 + n_1 = 0 & (1) \\ \tau_{xy} l_1 + (\sigma_y - \sigma_1)\, m_1 + \tau_{zy} n_1 &= 0 & \Rightarrow \quad & l_1 + (1-3)\, m_1 + n_1 = 0 & (2) \\ \tau_{xz} l_1 + \tau_{yz} m_1 + (\sigma_x - \sigma_1)\, n_1 &= 0 & & l_1 + m_1 + (1-3)\, n_1 = 0 & (3) \end{aligned}$$

Rozwiązujemy układ równań (1) i (2) względem niewiadomych l_1 i m_1. Otrzymujemy

$$m_1 = n_1 \ , \qquad l_1 = n_1 \ .$$

Wykorzystując warunek geometryczny

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \ \Rightarrow \ n_1^2 + n_1^2 + n_1^2 = 1$$

otrzymujemy kosinusy kierunkowe pierwszego kierunku głównego:

$$\underline{\underline{n_1 = l_1 = m_1 = \pm \tfrac{1}{\sqrt{3}}}} \ .$$

Dla drugiego, jak i trzeciego kierunku głównego, układ równań (1)-(3) redukuje się do jednego równania $l + m + n = 0$. Dołączając warunek $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ i wybierając przykładowo n jako parametr, otrzymujemy nieskończenie wiele rozwiązań postaci

$$l = -\tfrac{1}{2} n \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-3n^2 + 2} \ , \quad m = -l - n \ .$$

Zatem każda prosta leżąca w płaszczyźnie określonej wektorem normalnym $\vec{\mu}_1 = [\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ wyznacza kierunek główny.

ZADANIE 3. Obliczyć wartości naprężeń głównych stanu naprężenia:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}$$

<u>Uwaga</u>: Dane liczbowe w tym zadaniu dobrane są tak, aby otrzymane wartości naprężeń głównych były liczbami całkowitymi. Przedstawiona tu metoda rozwiązania równania wiekowego, polegająca na poszukiwaniu podzielników wyrazu wolnego, nie jest metodą ogólną.

Rozwiązanie

Obliczamy wartości niezmienników stanu naprężenia.

$$s_{\mathrm{I}} = \sigma_x + \sigma_x + \sigma_z = 6 + 6 + 8 = 20 \text{ MPa}$$

$$s_{\mathrm{II}} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 36 - 9 + 48 + 48 = 123 \text{ MPa}^2$$

$$s_{\mathrm{III}} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 8 \cdot [6 \cdot 6 - (-3) \cdot (-3)] = 216 \text{ MPa}^3$$

Naprężenia główne wyznaczamy z równania

$$\sigma^3 - \sigma^2 s_{\mathrm{I}} + \sigma s_{\mathrm{II}} - s_{\mathrm{III}} = 0 \ ,$$

które po wstawieniu obliczonych wartości liczbowych niezmienników ma postać

$$\sigma^3 - 20\sigma^2 + 123\sigma - 216 = 0 \ .$$

Całkowitych pierwiastków tego równania poszukujemy wśród podzielników wyrazu wolnego. Podstawiając $\sigma = 3$ można sprawdzić, że liczba 3, która jest podzielnikiem liczby 216, spełnia nasze równanie.

Wykonajmy dzielenie:

$$
\begin{array}{l}
(\sigma^3 - 20\sigma^2 + 123\sigma - 216) : (\sigma - 3) = \sigma^2 - 17\sigma + 72 \\
\underline{\sigma^3 - 3\sigma^2} \\
\quad -17\sigma^2 + 123\sigma \\
\quad \underline{-17\sigma^2 + 51\sigma} \\
\qquad\qquad 72\sigma - 216 \\
\qquad\qquad \underline{72\sigma - 216} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Pozostałe pierwiastki dostaniemy z równania kwadratowego

$$\sigma^2 - 17\sigma + 72 = 0 .$$

Obliczamy:

$$\Delta = 17^2 - 4 \cdot 1 \cdot 72 = 1 \ , \quad \sqrt{\Delta} = 1$$

$$\sigma' = \frac{17+1}{2} = 9$$

$$\sigma'' = \frac{17-1}{2} = 8$$

Mamy zatem następujące naprężenia główne:

$$\underline{\underline{\sigma_1 = 9 \, , \ \sigma_2 = 8 \, , \ \sigma_3 = 3}} \ \ [\text{MPa}] \ .$$

Rozwiązanie tego przykładu można było znaleźć w inny sposób.
Zauważmy, że naprężeniu $\sigma_z = 8$ odpowiadają naprężenia styczne $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$. (zera w 3-ciej kolumnie i 3-cim wierszu). Zatem, z definicji, naprężenie $\sigma_z = 8$ jest naprężeniem głównym, a kierunek osi z - kierunkiem głównym. Pozostałe naprężenia główne będą pierwiastkami równania kwadratowego otrzymanego po wykonaniu dzielenia $(\sigma^3 - 20\sigma^2 + 123\sigma - 216) : (\sigma - 8)$.

Podany sposób rozwiązania zaleca się jako ćwiczenie do samodzielnego wykonania.

ZADANIE 4. W pewnym punkcie dany jest stan naprężenia:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}$$

Znaleźć wektor naprężenia $\overline{p}$ w tym punkcie, w przekroju o normalnej zewnętrznej $\overline{n} = \left[\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right]$. Rozłożyć następnie wektor $\overline{p}$ na naprężenia normalne $\overline{\sigma}_n$ oraz styczne $\overline{\tau}_n$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że wektor $\overline{n}$ jest wektorem jednostkowym, $|\overline{n}| = {n_x}^2 + {n_y}^2 + {n_z}^2 = \frac{16}{25} + 0 + \frac{9}{25} = 1$.
Składowe wektora naprężenia $\overline{p} = [p_x, p_y, p_z]$ w przekroju o normalnej zewnętrznej określonej wektorem $\overline{n}\,[n_x, n_y, n_z]$, wyznaczymy korzystając z pierwszego prawa Cauchy'ego:

$$p_i = \sigma_{ij} n_j : \quad \begin{cases} p_x = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z \\ p_y = \sigma_{yx} n_y + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{yz} n_z \\ p_z = \sigma_{zx} n_x + \sigma_{zy} n_y + \sigma_{zz} n_z \end{cases} .$$

Podstawiając dane liczbowe otrzymujemy:

$$\begin{cases} p_x = 2 \cdot \frac{4}{5} + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot \frac{3}{5} = \frac{8}{5} \\ p_y = (-1) \cdot \frac{4}{5} + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5} \\ p_z = 0 \cdot \frac{4}{5} + 2 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \end{cases} ,$$

Naprężenie p w danym przekroju (długość wektora $\overline{p}$) wynosi

$$|\overline{p}| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} = \sqrt{\left(\tfrac{8}{5}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{5}\right)^2 + \left(\tfrac{3}{5}\right)^2} = 1.755 \text{ MPa} .$$

Teraz obliczamy wartość liczbową naprężenia normalnego w danym przekroju:

$$\sigma_n = \overline{p} \cdot \overline{n} = p_x n_x + p_y n_y + p_z n_z = \frac{8}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{2}{5} \cdot 0 + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{41}{25} = 1.64 \text{ MPa} .$$

A zatem wektor naprężenia $\overline{\sigma}$ wynosi

$$\overline{\sigma}_n = 1{,}64 \cdot \overline{n} = \left[1.64 \cdot \tfrac{4}{5},\ 1.64 \cdot 0,\ 1.64 \cdot \tfrac{3}{5}\right] = [1.312, 0, 0.984] .$$

Następnie obliczamy naprężenie styczne:

$$\overline{p} = \overline{\sigma}_n + \overline{\tau}_n \quad , \qquad \overline{\tau}_n = \overline{p} - \overline{\sigma}_n ,$$

co pozwala wyznaczyć odpowiednie składowe wektora $\overline{\tau}_n$:

$$\begin{cases} \tau_{nx} = \frac{8}{5} - 1{,}312 = 0{,}288 \\ \tau_{ny} = \frac{2}{5} - 0{,}0 = 0{,}4 \\ \tau_{nz} = \frac{3}{5} - 0{,}984 = -0{,}384 \end{cases} \qquad \overline{\tau}_n = [0.288, 0.400, -0.384]$$

ZADANIE 5. Dla tensora odkształcenia zdefiniowanego w sposób następujący:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

znaleźć aksjator i dewiator.

Rozwiązanie:

Każdy tensor symetryczny drugiego rzędu (co odnosi się do tensorów naprężenia, odkształcenia i bezwładności) można przedstawić w postaci sumy dwóch tensorów symetrycznych zwanych aksjatorem i dewiatorem. Dla tensora odkształcenia, aksjator (tensor kulisty) opisuje zmianę objętości, natomiast dewiator – zmianę postaci: Tensor stanu odkształcenia można przedstawić jako sumę aksjatora i dewiatora:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^A + \boldsymbol{\varepsilon}^D .$$

gdzie.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^A = \begin{bmatrix} \varepsilon_{śr} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{śr} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{śr} \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^D = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon_{śr} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \varepsilon_{śr} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} - \varepsilon_{śr} \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon_{śr} = \tfrac{1}{3}\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}\right)$$

W naszym zadaniu

$$\varepsilon_{śr} = \tfrac{1}{3}\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}\right) = \tfrac{1}{3}\left(2 + 3 + 4\right) = 3 .$$

Zatem część kulista (aksjator) i dewiacyjna danego tensora naprężenia są wynoszą

$$\boldsymbol{\varepsilon}^A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

oraz

$$\boldsymbol{\varepsilon}^D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$