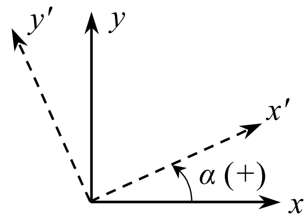
Przykład 6.2. Płaski stan naprężenia. Płaski stan odkształcenia.

ZADANIE 1. Dla danego płaskiego stanu naprężenia

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}$$

znaleźć składowe stanu naprężenia w układzie osi $x'y'$ obróconych względem osi xy o kąt α=30° oraz naprężenia i kierunki główne. Stosując konstrukcję *koła Mohra*, znaleźć (a) naprężenia i kierunki główne oraz (b) rozwiązać zagadnienie odwrotne, tzn. mając dane naprężenia i kierunki główne znaleźć składowe stanu naprężenia w układzie xy.

Rozwiązanie:
Osie układu xy po obrocie o kąt α oznaczamy jako $x'\,y'$.



Po obrocie układu współrzędnych o kąt α składowe stanu naprężenia transformują się według następujących wzorów:

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + 2\tau_{xy} \sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sigma_{y'} = \sigma_x \sin^2\alpha + \sigma_y \cos^2\alpha - 2\tau_{xy} \sin\alpha\cos\alpha$$

$$\tau_{x'y'} = -\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\sin\alpha\cos\alpha + \tau_{xy}\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)$$

Uwaga:
Składowe stanu odkształcenia transformują się według podobnych wzorów, wystarczy składowe tensora naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ zastąpić odpowiednimi składowymi tensora odkształcenia $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Podstawiając wartości liczbowe, otrzymujemy:

$$\sigma_{x'} = 3\cdot\frac{3}{4} + 2\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{11+2\sqrt{3}}{4} = 3{,}62 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{y'} = 3\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{3}{4} - 2\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{9-2\sqrt{3}}{4} = 1{,}38 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x'y'} = -\left(3-2\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{4} = 0{,}07 \text{ MPa}$$

Naprężenia główne wyznaczamy z równania wiekowego

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma) - \tau_{xy}^2 = 0 \Leftrightarrow \underline{\sigma^2 - \sigma(\sigma_x + \sigma_y) + \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2 = 0}$$

Współczynniki w równaniu wiekowym są niezmiennikami i wynoszą:

$$s_{\mathrm{I}} = \sigma_x + \sigma_y \;, \qquad s_{\mathrm{II}} = \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2 \;, \qquad s_{\mathrm{III}} = 0\,.$$

Rozwiązaniami równania wiekowego są naprężenia główne:

$$\sigma_{1,2} = \frac{s_{\mathrm{I}}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s_{\mathrm{I}}}{2}\right)^2 - s_{\mathrm{II}}} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \ .$$

Kierunek główny jest normalny do przekroju, w którym naprężenie styczne jest równe zeru. Tak więc kąt, o jaki należy obrócić układ współrzędnych xy aby otrzymać kierunki główne obliczamy z równania:

$$\tau_{x'y'} = -\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\sin\alpha\cos\alpha + \tau_{xy}\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) = -\frac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha = 0$$

$$tg 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \alpha_0 \pm n\frac{\pi}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \ , \quad \alpha_0 \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

Kąt α_0 jest kątem, o jaki należy obrócić oś, wzdłuż której występuje większe naprężenie normalne, aby otrzymać kierunek główny *1*, tzn.:

jeżeli $\sigma_x > \sigma_y$, to $\alpha_0 = \sphericalangle\,(x, 1)$, $\alpha_0 + \frac{\pi}{2} = \sphericalangle\,(x, 2)$;

jeżeli $\sigma_x < \sigma_y$, to $\alpha_0 = \sphericalangle\,(y, 1)$, $\alpha_0 + \frac{\pi}{2} = \sphericalangle\,(x, 1)$;

jeżeli $\sigma_x = \sigma_y$ i $\tau_{xy} = \tau_{\max} > 0$, to $\alpha_0 = \sphericalangle\,(x, 1) = +\frac{\pi}{4}$;

jeżeli $\sigma_x = \sigma_y$ i $\tau_{xy} = \tau_{\max} < 0$, to $\alpha_0 = \sphericalangle\,(x, 1) = -\frac{\pi}{4}$.

Podstawiając wartości liczbowe, otrzymujemy

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{1}{2}\left(5 \pm \sqrt{5}\right)\mathrm{MPa}\,,$$

$$tg 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 = 31{,}7^\circ \ ; \quad \sigma_x > \sigma_y \text{ , więc } \alpha_0 = \sphericalangle\,(x, 1) \ , \ \alpha_0 + \tfrac{\pi}{2} = \sphericalangle\,(x, 2).$$

Kontrolą poprawności obliczeń jest sprawdzenie niezmienników:

$$s_{\mathrm{I}} = \sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2 = 5 \ \checkmark \qquad s_{\mathrm{II}} = \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2 = \sigma_1\sigma_2 = 5 \ \checkmark$$

Koło naprężeń Mohra

Istotą konstrukcji graficznej zwanej *kołem Mohra* jest to, że wyrażenie $\sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + \tau_{xy}^2}$, czyli promień koła Mohra, jest niezmiennikiem płaskiej transformacji stanu naprężenia przy obrocie prostokątnego układu współrzędnych *xy*. W literaturze spotkać można różne sposoby realizacji tej konstrukcji. Przedstawiony poniżej sposób zaczerpnięto z podręcznika *Wytrzymałość Materiałów*; Z. Dyląg, A. Jakubowicz, Z. Orłoś, WNT W-wa, 1996.

Przypadek (a). Dla danego stanu naprężenia w układzie osi *xy* znaleźć naprężenia główne i odpowiadające im kierunki główne (Rys. 1).

Koło Mohra prowadzimy przez dwa punkty $A(\sigma_x, \tau_{xy})$ i $A'(\sigma_y, -\tau_{xy})$. Na osi poziomej odkładamy naprężenia normalne, zaś na pionowej – skierowanej w dół – naprężenia styczne. Łącząc punkty *A* i *A'* znajdujemy średnicę i środek *S* koła Mohra. Kreślimy okrąg o promieniu *SA*, który na osi poziomej wyznacza naprężenia główne σ_1 oraz σ_2. Zauważmy, że zachodzą zależności:

$$|\overline{SC}| = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \quad , \qquad |\overline{CA}| = \tau_{xy}$$

$$|\overline{SA}| = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad , \qquad |\overline{OS}| = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad ,$$

$$\sigma_{1,2} = |\overline{OS}| \pm |\overline{SA}| = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \tfrac{1}{2}(5 \pm \sqrt{5})$$

$$tg 2\alpha_0 = \frac{|\overline{CA}|}{|\overline{SC}|} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = 2 \;\Rightarrow\; 2\alpha = 63{,}4^\circ \;,\; \alpha = 31{,}7^\circ$$

Kąt $2\alpha_0$ to kąt środkowy w okręgu, zatem poszukiwany kąt α_0 znajdujemy jako kąt wpisany oparty na tym samym łuku *AE*. Kąt α_0 uważa się za dodatni, jeżeli jest przeciwny do ruchu wskazówek zegara.

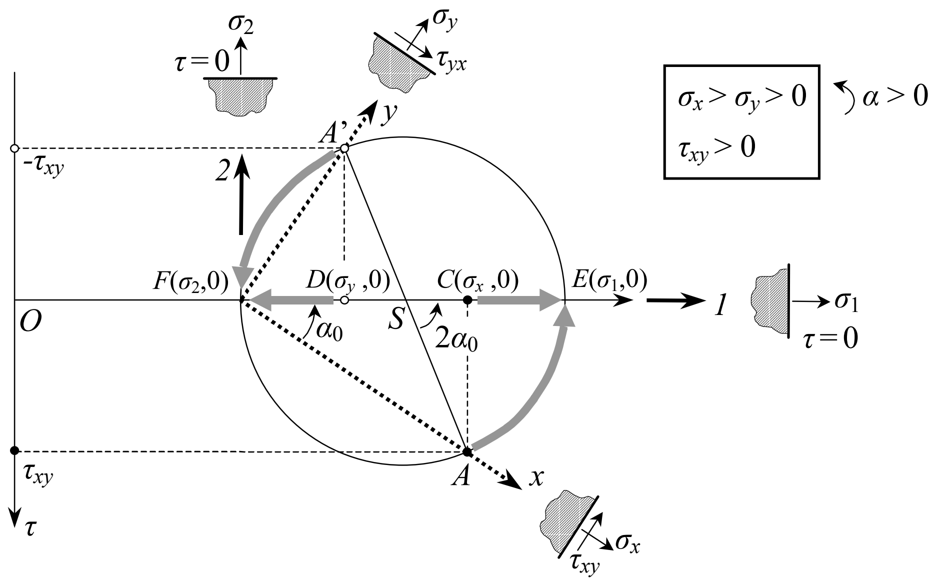
Każdy, dowolny punkt na kole Mohra przedstawia naprężenia w pewnym przekroju określonym normalną poprowadzoną przez ten punkt z punktu *F*.

To znaczy, że prowadząc prostą *FA* określamy oś *x*, a współrzędne punktu *A* (σ_x=3, τ_{xy}=1), w przyjętym dla koła Mohra układzie σ–τ, są naprężeniami w przekroju prostopadłym do osi *x*. Oś *y* jest prostopadła do osi *x*, znajdujemy ją prowadząc prostą przez punkt *A*’ (kąt wpisany oparty na średnicy *AA’* jest kątem prostym).

W szczególności, prowadząc prostą z punktu *F* przez punkt *E*, któremu odpowiada maksymalne naprężenie normalne σ_1 oraz naprężenie styczne równe zeru, określamy kierunek główny *1*. Kierunek główny *2* jest do niego prostopadły.

Zauważmy, że obracając okład osi *xy* w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, naprężenie normalne σ_x rośnie do wartości σ_1 dla kąta α_0, natomiast naprężenie normalne σ_y maleje do wartości σ_2 dla kąta α_0 (na Rys. 1 oznaczono to symbolicznie strzałkami w kolorze szarym).

Wadą przedstawionej tu konstrukcji koła Mohra jest to, że oś *x*, przyjmowana zwykle jako pozioma, jest w tym przypadku ukośna.



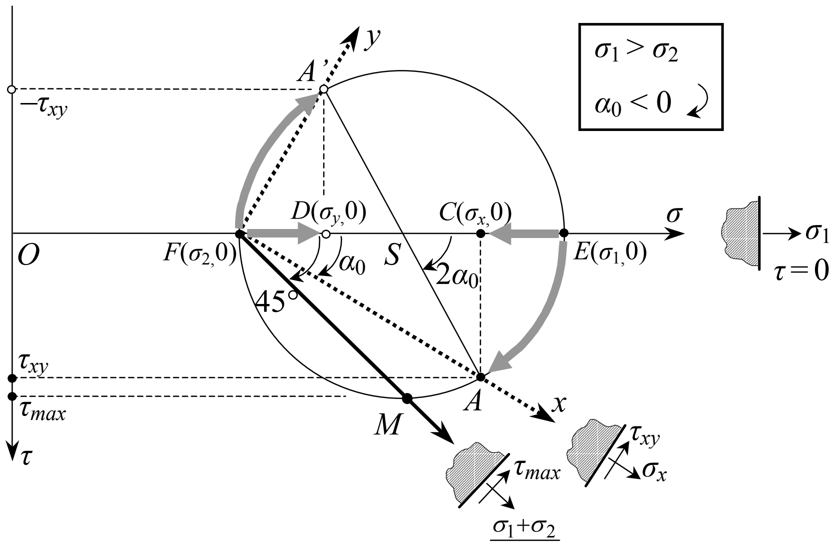
Rys. 1. Koło naprężeń Mohra dla danych $\sigma_x = 3$, $\sigma_y = 2$ i $\tau_{xy} = 1$ [MPa]

Przypadek (b). Dla danych naprężeń głównych $\sigma_1 > \sigma_2$ znaleźć naprężenia w układzie osi xy obróconych o dany kąt $\alpha < 0$ względem kierunku maksymalnego naprężenia głównego (Rys. 2).

Na osi poziomej znajdujemy punkty E i F odpowiadające naprężeniom $\sigma_1 = \frac{1}{2}(5+\sqrt{5})$ i $\sigma_2 = \frac{1}{2}(5-\sqrt{5})$. Ze środka koła S znajdującego się w środku odcinka FE, zataczamy okrąg o promieniu SE. Następnie rysujemy średnicę, która z osią poziomą (kierunkiem głównym *1*) tworzy kąt $2\alpha = 63{,}4^\circ$ Na przecięciu średnicy z okręgiem znajdujemy punkty A i A'. Prowadzimy pionowe odcinki AC i $A'D$ – odpowiadają one szukanym naprężeniom stycznym $\tau_{xy} = 1$ i $-\tau_{xy} = -1$. Odcinki OB oraz OD odpowiadają szukanym naprężeniom $\sigma_x = 3$ oraz $\sigma_y = 2$.

Zauważmy, że punktowi M na kole Mohra odpowiada przekrój, w którym występuje maksymalne naprężenie styczne. Jest on nachylony pod kątem 45° do kierunków głównych. Maksymalne naprężenie styczne wynosi:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \ .$$



Rys. 2. Koło naprężeń Mohra dla danych
$\sigma_1 = \frac{1}{2}(5+\sqrt{5})$, $\sigma_2 = \frac{1}{2}(5-\sqrt{5})$ [MPa], $2\alpha = 63{,}4^\circ$

Uwaga:
Konstrukcja *koła odkształceń Mohra* jest analogiczna do koła naprężeń, wystarczy zamienić odpowiednie naprężenia na odkształcenia.

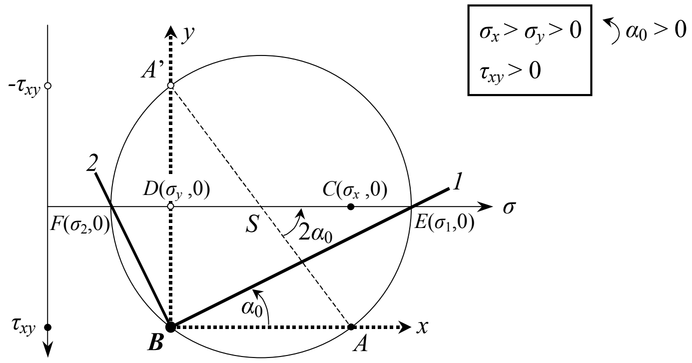
$$\sigma_x \to \varepsilon_x \ , \ \sigma_y \to \varepsilon_y \ , \ \tau_{xy} \to \frac{1}{2}\gamma_{xy}$$

ZADANIE 3. Za pomocą *koła Mohra* znaleźć naprężenia główne oraz kierunki główne dla poniższych stanów naprężenia:

$$\text{A)}\ \boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}9 & 4\\ 4 & 3\end{bmatrix}\qquad \text{B)}\ \boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 4 & 9\end{bmatrix}\qquad \text{C)}\ \boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}3 & -4\\ -4 & 9\end{bmatrix}$$

$$\text{D)}\ \boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}9 & -4\\ -4 & 3\end{bmatrix}\qquad \text{E)}\ \boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 5 & -2\end{bmatrix}\qquad \text{F)}\ \boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}3 & -5\\ -5 & 3\end{bmatrix}$$

Przedstawimy tu nieco inną konstrukcję *koła Mohra*, w której oś *x* jest pozioma. W tym celu, znajdujemy na kole pewien pomocniczy punkt *B* zwany biegunem, prowadząc przez punkt *A* prostą poziomą, a przez punkt *A*' prostą pionową. Tak jak w poprzednio opisanej konstrukcji, każdy punkt na kole Mohra przedstawia naprężenia w pewnym przekroju określonym normalną poprowadzoną przez ten punkt – tym razem – z bieguna *B*, a nie jak poprzednio z punku *F*. Prosta *BA* wyznacza więc oś *x* (jest pozioma), prosta *BA*' wyznacza oś *y*, zaś proste *BE* i *BF* odpowiednio kierunki *1* oraz *2*.



Rozwiązanie:

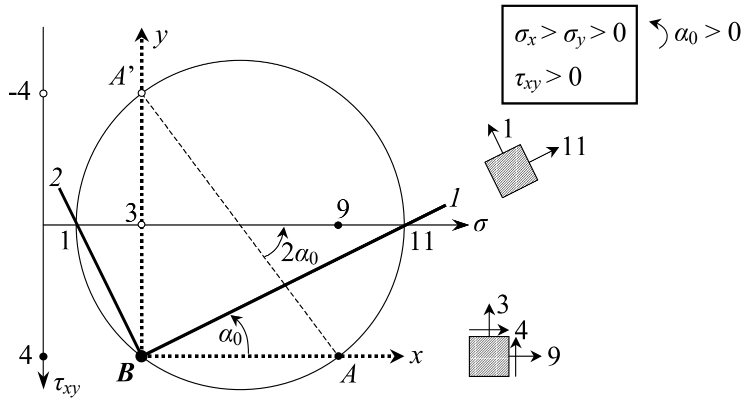
A)

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}9 & 4\\ 4 & 3\end{bmatrix}\ [\text{Pa}]$$

$\sigma_1 = 11$ Pa

$\sigma_2 = 1$ Pa

$\alpha_0 = 26{,}6^\circ$



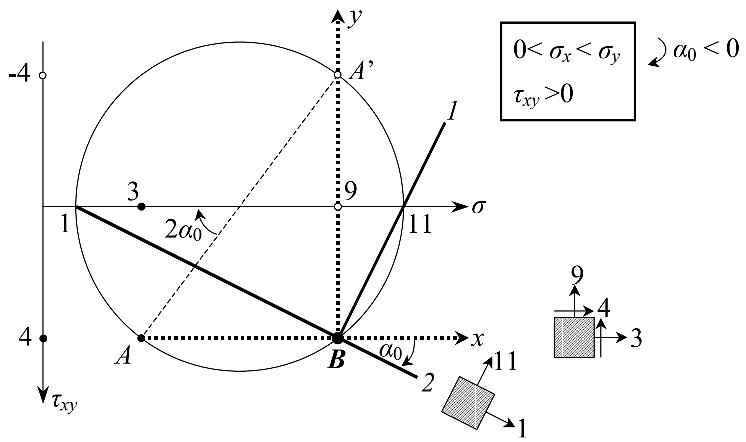
B)

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 4 & 9\end{bmatrix}\ [\text{Pa}]$$

$\sigma_1 = 11$ Pa

$\sigma_2 = 1$ Pa

$\alpha_0 = -26{,}6^\circ$



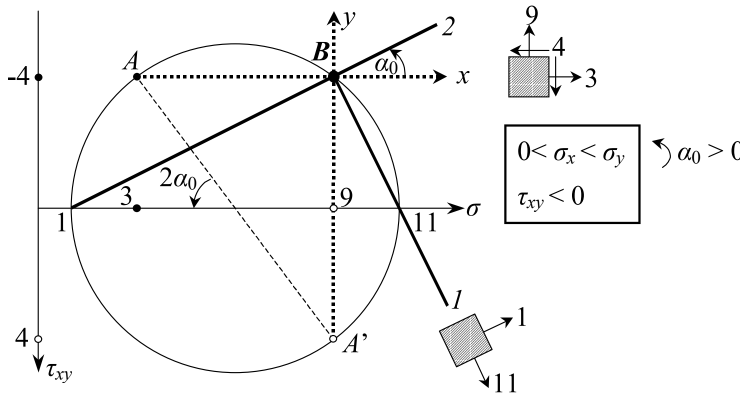
C)

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 9 \end{bmatrix} \text{ [Pa]}$$

$\sigma_1 = 11$ Pa

$\sigma_2 = 1$ Pa

$\alpha_0 = 26{,}6^\circ$



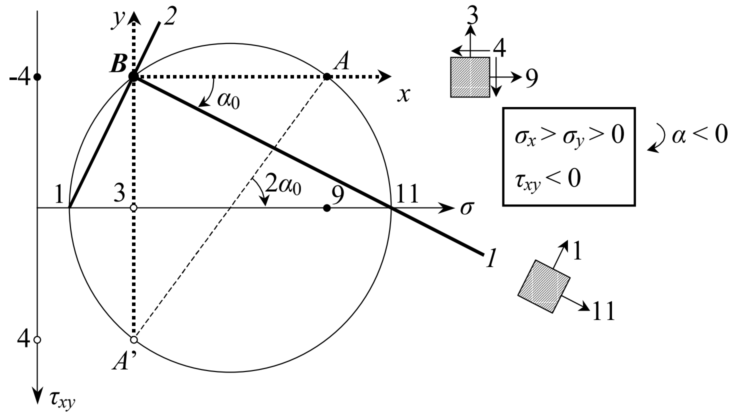
D)

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \text{ [Pa]}$$

$\sigma_1 = 11$ Pa

$\sigma_2 = 1$ Pa

$\alpha_0 = -26{,}6^\circ$



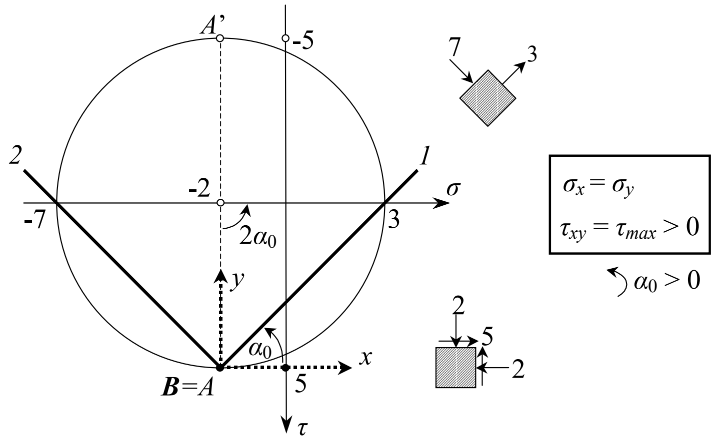
E)

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \text{ [Pa]}$$

$\sigma_1 = 3$ Pa

$\sigma_2 = -7$ Pa

$\alpha_0 = 45^\circ$



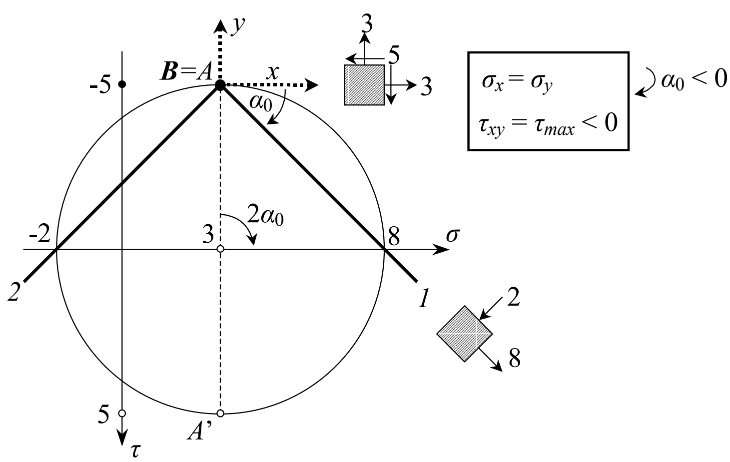
F)

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \text{ [Pa]}$$

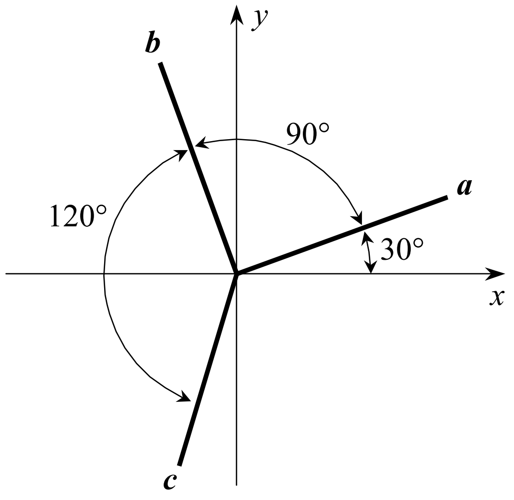
$\sigma_1 = 8$ Pa

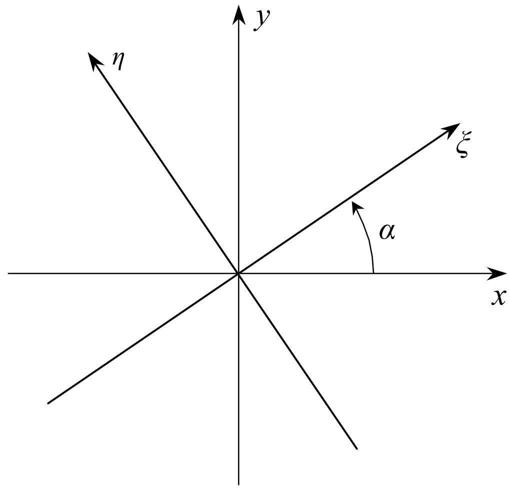
$\sigma_2 = -2$ Pa

$\alpha_0 = -45^\circ$



ZADANIE 4. W pewnym punkcie na powierzchni ciała określono stan odkształcenia, mierząc wydłużenia ε_a, ε_b, ε_c w trzech kierunkach: *a*, *b*, *c*. Znaleźć składowe stanu odkształcenia w układzie osi *xy*.





Rozwiązanie

W ogólnym przypadku, odkształcenia ε_ξ, ε_η, $\gamma_{\xi\eta}$ w układzie osi $\xi\eta$ obróconych o dowolny kąt α względem osi *xy* obliczamy ze wzorów:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\xi &= \tfrac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \tfrac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\cos 2\alpha + \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\alpha \\
\varepsilon_\eta &= \tfrac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \tfrac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\cos 2\alpha - \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\alpha \qquad \text{(1 a,b,c)} \\
\tfrac{1}{2}\gamma_{\xi\eta} &= -\tfrac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\sin 2\alpha + \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\cos 2\alpha
\end{aligned}$$

W naszym zadaniu wystarczy wykorzystać tylko pierwszy wzór, tzn. (1a). Podstawiając kolejno za α odpowiednie kąty, jakie tworzą osie a, b, c z osią x, można wyrazić znane odkształcenia ε_a, ε_b, ε_c za pomocą szukanych składowych $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$. Zatem

$$\begin{aligned}
\varepsilon_a &= \tfrac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \tfrac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\cos(2\cdot 30^\circ) + \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\sin(2\cdot 30^\circ) \\
\varepsilon_b &= \tfrac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \tfrac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\cos(2\cdot 120^\circ) + \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\sin(2\cdot 120^\circ) \\
\varepsilon_c &= \tfrac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \tfrac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\cos(2\cdot 240^\circ) + \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\sin(2\cdot 240^\circ)
\end{aligned}$$

Uwzględniając, że

$$\cos(2\cdot 30^\circ) = \cos 60^\circ = \tfrac{1}{2}; \qquad \sin(2\cdot 30^\circ) = \sin 60^\circ = \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos(2\cdot 120^\circ) = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\tfrac{1}{2}; \qquad \sin(2\cdot 120^\circ) = \sin(180^\circ + 60^\circ) = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos(2\cdot 240^\circ) = \cos(360^\circ + 90^\circ + 30^\circ) = -\tfrac{1}{2}; \qquad \sin(2\cdot 240^\circ) = \sin(360^\circ + 90^\circ + 30^\circ) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

otrzymujemy układ trzech równań z trzema niewiadomymi składowymi stanu odkształcenia $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$:

$$\varepsilon_a = \tfrac{1}{2}\varepsilon_x(1+\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}\varepsilon_y(1-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\varepsilon_b = \tfrac{1}{2}\varepsilon_x(1-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}\varepsilon_y(1+\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\varepsilon_c = \tfrac{1}{2}\varepsilon_x(1-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}\varepsilon_y(1+\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

Porządkujemy:

$$\begin{cases} \varepsilon_a = \tfrac{3}{4}\varepsilon_x + \tfrac{1}{4}\varepsilon_y + \tfrac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy} \\ \varepsilon_b = \tfrac{1}{4}\varepsilon_x + \tfrac{3}{4}\varepsilon_y - \tfrac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy} \\ \varepsilon_c = \tfrac{1}{4}\varepsilon_x + \tfrac{3}{4}\varepsilon_y + \tfrac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy} \end{cases} \tag{2a,b,c}$$

Odejmując stronami równania (2b,c), obliczamy odkształcenie postaciowe γ_{xy}

$$\varepsilon_b - \varepsilon_c = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\gamma_{xy} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\gamma_{xy} = \tfrac{2}{\sqrt{3}}(\varepsilon_c - \varepsilon_b)}}$$

Podstawiając ten wynik do równań (2a,b) otrzymujemy układ, z którego znajdziemy odkształcenia podłużne $\varepsilon_x, \varepsilon_y$:

$$\varepsilon_a = \tfrac{3}{4}\varepsilon_x + \tfrac{1}{4}\varepsilon_y + \tfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\tfrac{2}{\sqrt{3}}(\varepsilon_c - \varepsilon_b)$$
$$\varepsilon_b = \tfrac{1}{4}\varepsilon_x + \tfrac{3}{4}\varepsilon_y - \tfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\tfrac{2}{\sqrt{3}}(\varepsilon_c - \varepsilon_b) \quad |\cdot(-3) \qquad \oplus$$
$$\varepsilon_a - 3\varepsilon_b = \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{9}{4}\right)\varepsilon_y + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}\right)(\varepsilon_c - \varepsilon_b)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon_y = \tfrac{1}{2}(-\varepsilon_a + \varepsilon_b + 2\varepsilon_c)}}$$

Podstawiając obliczone γ_{xy} i ε_y do równania (2a) otrzymujemy odkształcenie ε_x:

$$\underline{\underline{\varepsilon_x = \tfrac{1}{2}(3\varepsilon_a + \varepsilon_b - 2\varepsilon_c)}}$$