Przykład 6.3. Uogólnione prawo Hooke'a

Związki między odkształceniami i naprężeniami, w przypadku ciała izotropowego, opisuje uogólnione prawo Hooke'a:

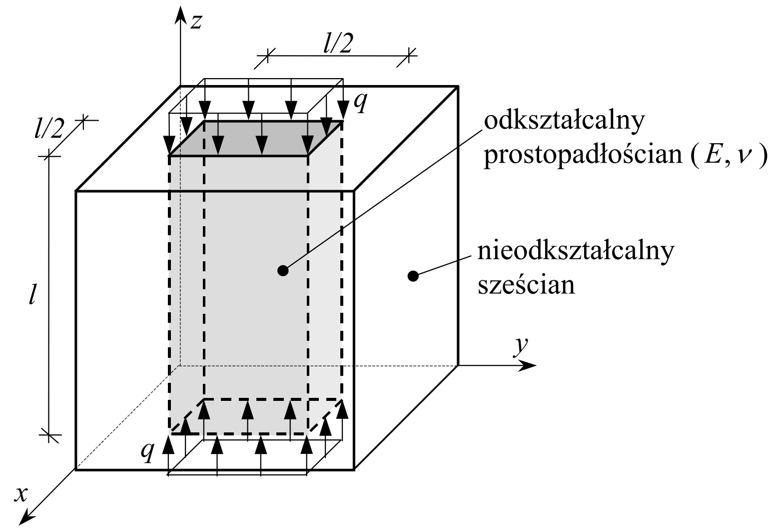
$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], &\quad \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], &\quad \gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], &\quad \gamma_{zx} &= 2\varepsilon_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G},
\end{aligned} \tag{a}$$

Rozwiązując równania (a) względem naprężeń, otrzymujemy związki:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\right], &\quad \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = 2G\,\varepsilon_{xy} \\
\sigma_y &= \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\right], &\quad \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} = 2G\,\varepsilon_{yz} \\
\sigma_z &= \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\right], &\quad \tau_{zx} &= G\gamma_{zx} = 2G\,\varepsilon_{zx}
\end{aligned} \tag{b}$$

W tych wzorach E oznacza moduł sprężystości podłużnej (moduł Younga), G moduł sprężystości poprzecznej (moduł Kirchoffa), zaś ν współczynnik Poissona ($\varepsilon_2 = -\nu\,\varepsilon_1$).

ZADANIE 1. Wewnątrz nieodkształcalnego sześcianu o krawędzi l umieszczony jest odkształcalny prostopadłościan wykonany z jednorodnego materiału o danych parametrach E i ν. Na podstawach prostopadłościanu przyłożono równomierne ciśnienie q. Zakłada się, że tarcie o ścianki nie występuje. Obliczyć naprężenia na płaszczyznach nieodkształcalnego sześcianu oraz zmianę objętości wewnętrznego prostopadłościanu.



Rozwiązanie

Zewnętrzny sześcian jest nieskończenie sztywny, zatem wydłużenia wewnętrznego prostopadłościanu w kierunku x i y są równe zeru. Stan odkształcenia jest jednorodny.

$$\Delta l_y = \varepsilon_y \frac{l}{2} = 0$$

$$\Delta l_x = \varepsilon_x \frac{l}{2} = 0$$

Podstawiamy do wzorów (a):

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= 0 = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \Rightarrow \sigma_y = \nu(\sigma_z + \sigma_x) \\ \varepsilon_z &= 0 = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \Rightarrow \sigma_x = \nu(\sigma_y + \sigma_z)\end{aligned} \qquad (1)$$

Wewnętrzny prostopadłościan jest ściskany ciśnieniem q, zatem naprężenie

$$\sigma_z = -q \ .$$

Podstawiając ten związek do równań (1), otrzymujemy:

$$\begin{array}{l|l} \sigma_y - \nu\sigma_x = -\nu q & \cdot \nu \\ \sigma_x - \nu\sigma_y = -\nu q & \oplus \\ \hline (1-\nu^2)\sigma_x = -q\nu(1+\nu) & \end{array}$$

$$\underline{\underline{\sigma_x = -q\frac{\nu}{1-\nu}}} \ , \quad \sigma_y = -\nu q + \nu\sigma_x = -\nu q - \nu q\frac{\nu}{1-\nu} = -q\left(\nu + \frac{\nu^2}{1-\nu}\right) = \underline{\underline{-q\frac{\nu}{1-\nu}}}$$

Odkształcenie objętościowe (względny przyrost objętości) wyraża się wzorem:

$$\vartheta = \varepsilon_x + \varepsilon_x + \varepsilon_x = 3\varepsilon_{śr} \ .$$

Wyrażając odkształcenia przez naprężenia za pomocą wzorów (a), otrzymujemy:

$$\vartheta = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1-2\nu}{E}\cdot 3\sigma_{śr} = \frac{\sigma_{śr}}{\frac{E}{3(1-2\nu)}} = \frac{\sigma_{śr}}{K} \ ; \ K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

gdzie wielkość K jest *modułem ściśliwości Helmholtza*. Zauważmy, że jeżeli $\nu \to 1/2$ to $K \to \infty$, co oznacza, że materiał jest nieściśliwy (brak zmiany objętości). Dla $\nu \to 0$ mamy $K = E/3 = K_{\min}$, a materiał taki nazywamy idealnie ściśliwym (największa zmiana objętości). Obliczamy:

$$\sigma_{śr} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{-q\frac{\nu}{1-\nu} - q\frac{\nu}{1-\nu} - q}{3} = -\frac{q}{3}\frac{1+\nu}{1-\nu} ,$$

$$\vartheta = \frac{\sigma_{śr}}{\frac{E}{3(1-2\nu)}} = -\frac{q}{3}\frac{1+\nu}{1-\nu}\cdot\frac{3(1-2\nu)}{E} = \underline{\underline{-\frac{q}{E}\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}}} \ .$$

Odpowiedź

Naprężenia w prostopadłościanie wynoszą:

$$\sigma_x = -q\frac{\nu}{1-\nu} \ ,$$

$$\sigma_y = -q\frac{\nu}{1-\nu} \ , \qquad \text{(ściskanie)}$$

$$\sigma_z = -q \ .$$

Zmiana objętości prostopadłościanu pod wpływem przyłożonego obciążenia wynosi:

$$\vartheta = -\frac{q}{E}\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \qquad \text{(ubytek objętości)}$$

ZADANIE 2. Stan odkształcenia w pewnym punkcie ciała jest określony następująco:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

Obliczyć składowe stanu naprężenia, jeśli stałe sprężystości dla izotropowego, liniowo-sprężystego materiału wynoszą: E=210 GPa, ν=0,3.

Rozwiązanie

Składowe stanu naprężenia znajdujemy z równania wiążącego naprężenia i odkształcenia (uogólnionego prawa Hooke'a), które w zapisie wskaźnikowym i konwencji sumacyjnej ma postać:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$$

gdzie μ oraz λ są stałymi Lame'go:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad , \ \lambda = \frac{\mathrm{E}\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

oraz

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \ , \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \ \text{dla} \ \ i = j \\ 0 \ \text{dla} \ \ i \neq j \end{cases} \ \text{(delta Kroneckera)}$$

Podstawiamy dane liczbowe. Obliczamy stałe Lamego:

$$\mu = G = \frac{210 \text{ GPa}}{2(1+0{,}3)} = 80{,}77 \text{ GPa} \ , \ \lambda = \frac{210 \text{ GPa} \cdot 0{,}3}{(1+0{,}3)(1-0{,}6)} = 121{,}15 \text{ GPa} \ ,$$

a następnie składowe stanu naprężenia:

$$\sigma_{11} = 2G\varepsilon_{11} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = 2 \cdot 80{,}77 \text{ kPa} \cdot 1 + 121{,}15 \text{ kPa} \cdot 6 = 888{,}46 \text{ kPa} \ ,$$

$$\sigma_{22} = 2G\varepsilon_{22} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = 2 \cdot 80{,}77 \text{ kPa} \cdot 3 + 121{,}15 \text{ kPa} \cdot 6 = 1211{,}5 \text{ kPa} \ ,$$

$$\sigma_{33} = 2G\varepsilon_{3} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = 2 \cdot 80{,}77 \text{ kPa} \cdot 2 + 121{,}15 \text{ kPa} \cdot 6 = 1049{,}98 \text{ kPa} \ ,$$

$$\sigma_{12} = 2G\varepsilon_{12} = 2 \cdot 80{,}77 \text{ kPa} \cdot 2 = 323{,}08 \text{ kPa} \ ,$$

$$\sigma_{13} = 2G\varepsilon_{13} = 2 \cdot 80{,}77 \text{ kPa} \cdot 0 = 0 \ ,$$

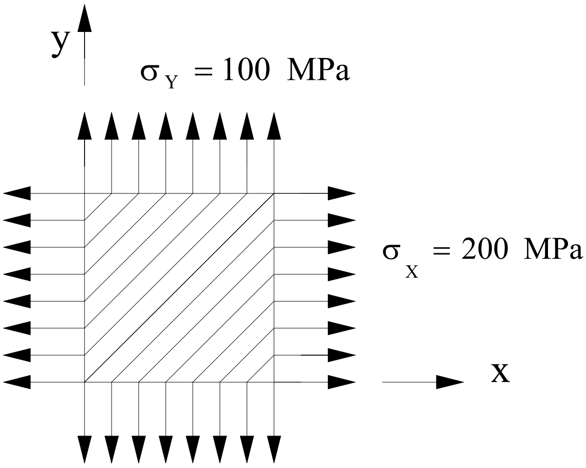
$$\sigma_{23} = 2G\varepsilon_{23} = 2 \cdot 80{,}77 \text{ kPa} \cdot 0 = 0 \ .$$

Uwaga: składowe stanu naprężenia można również obliczyć, korzystając ze wzorów (b).

Odpowiedź: Stan naprężenia w punkcie jest określony następująco:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 888{,}46 & 323{,}08 & 0 \\ 323{,}08 & 1211{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1050{,}0 \end{bmatrix} [\text{kPa}] \ .$$

ZADANIE 3. Cienka kwadratowa tarcza, pokazana na rysunku, wykonana z materiału sprężystego, jest rozciągana w dwóch kierunkach tak, że mamy σ_x=200MPa i σ_y=100MPa. Znane są też odkształcenia $\varepsilon_x = 2{,}45\cdot10^{-3}$ i $\varepsilon_y = 0{,}49\cdot10^{-3}$. Ile wynosi *E, ν* oraz *G* dla materiału tarczy? Jakie powstanie odkształcenie postaciowe γ_{xy}, jeśli wywołamy naprężenia styczne τ_{xy}=80 MPa?



Rozwiązanie

W tarczy występuje płaski stan naprężenia. Odkształcenia ε_x i ε_y wyrażają się wzorami:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\sigma_y\right] = 2{,}45\cdot10^{-3} \tag{1}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\sigma_x\right] = 0{,}49\cdot10^{-3} \tag{2}$$

Dzieląc stronami powyższe wyrażenia i podstawiając wartości liczbowe, otrzymujemy:

$$\frac{200-\nu\cdot100}{100-\nu\cdot200} = 5 \quad ; \quad \frac{2-\nu}{1-2\nu} = 5 \quad ; \quad \underline{\underline{\nu = \frac{1}{3}}}$$

Podstawiając *ν* =1/3 do równania (1) mamy:

$$\frac{1}{E}\left[200 - \frac{1}{3}\cdot100\right] = 2{,}45\cdot10^{-3} \quad , \quad \frac{500}{3E} = \frac{2{,}45}{1000} \quad , \quad \underline{\underline{E = 6{,}80\cdot10^4 \text{ MPa}}}$$

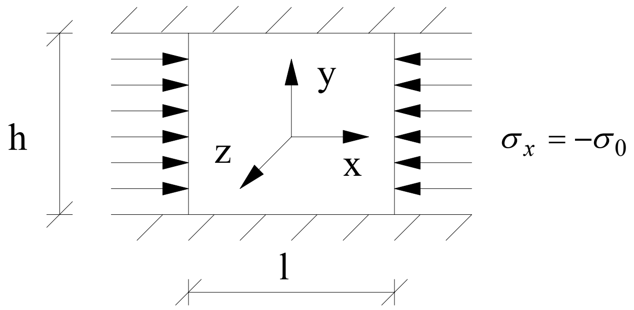
Obliczamy teraz moduł Kirchoffa:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{6{,}8\cdot10^4}{2\left(1+\frac{1}{3}\right)} = \underline{\underline{2{,}55\cdot10^4\,\text{MPa}}}$$

oraz kąt odkształcenia postaciowego:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{80}{2{,}55\cdot10^4} = \underline{\underline{3{,}14\cdot10^{-3}}} \ .$$

ZADANIE 4. Cienką płytkę o wymiarach $h \times l$ umieszczono w szczelinie o szerokości h. Przyjmuje się, że krawędzie szczeliny są nieodkształcalne, a tarcie nie występuje. Na brzegach swobodnych działa obciążenie, które wywołuje naprężenia $\sigma_x = -\sigma_0$. Powierzchnie płytki $|z| = g$ ($2g$–grubość płytki) są wolne od naprężeń. Obliczyć σ_y oraz ε_x i ε_z.



Rozwiązanie

Z warunku podparcia na brzegach $|y| = h/2$ wynika, że $\varepsilon_y = 0$ ($\Delta h = \varepsilon_y h = 0$). Stan odkształcenia jest jednorodny. Obliczamy naprężenie σ_y:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(-\sigma_0)\right] = 0 , \quad (\sigma_z = 0) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\sigma_y = -\nu\sigma_0}} .$$

Obliczamy pozostałe odkształcenia:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\sigma_y\right] = \frac{1}{E}\left[-\sigma_0 + \nu^2\sigma_0\right] = \underline{\underline{-\frac{1-\nu^2}{E}}}\sigma_0 < 0 ,$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] = \frac{1}{E}\left[0 - \nu(-\nu\sigma_0 - \sigma_0)\right] = \underline{\underline{\frac{\nu(1+\nu)\sigma_0}{E}}} > 0 .$$

Rozpatrzymy nasze zadanie, jeśli zmienia się temperatura o ΔT przy niezmienionych pozostałych warunkach sformułowanych w poprzedniej części zadania.
Z warunku podparcia brzegów wynika, że

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(-\sigma_0)\right] + \alpha\Delta T = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_y = -\nu\sigma_0 - E\alpha\Delta T$$

Pozostałe odkształcenia wynoszą:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\sigma_y\right] + \alpha\Delta T = \frac{1}{E}\left[-\sigma_0 - \nu(-\nu\sigma_0 - E\alpha\Delta T)\right] + \alpha\Delta T = -\frac{1-\nu^2}{E}\sigma_0 + (1+\nu)\alpha\Delta T$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\left[\sigma_x + \sigma_y\right] + \alpha\Delta T = -\frac{\nu}{E}\left[(-\sigma_0 - \nu\sigma_0 - E\alpha\Delta T)\right] + \alpha\Delta T = \frac{\nu(1+\nu)}{E}\sigma_0 + (1+\nu)\alpha\Delta T$$

Obliczymy dodatkowo względną zmianę objętości płytki. Korzystamy ze wzoru:

$$\vartheta = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_x + \varepsilon_z , \quad (\varepsilon_y = 0)$$

Dylatacja (względna zmiana objętości) z uwzględnieniem zmiany temperatury wynosi:

$$\vartheta = -\frac{1-\nu^2}{E}\sigma_0 + (1+\nu)\alpha\Delta T + \frac{\nu(1+\nu)}{E}\sigma_0 + (1+\nu)\alpha\Delta T = -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E}\sigma_0 + 2(1+\nu)\alpha\Delta T$$

ZADANIE 5. Stan naprężenia w pewnym punkcie ciała opisany jest następująco: $\sigma_x = 30$ MPa, $\sigma_y = 50$ MPa, $\tau_{xy} = 5$ MPa, $\sigma_z = 40$ MPa, $\tau_{yz} = 5$ MPa, $\tau_{xz} = 10$ MPa
Parametry materiałowe wynoszą: moduł Younga E=210 GPa i współczynnik Poissona ν=0.3. Zapisać macierz podatności materiału oraz obliczyć składowe stanu odkształcenia w danym punkcie.

Rozwiązanie

W trójwymiarowym stanie naprężenia, składowe stanu odkształcenia obliczamy z uogólnionego prawa Hooke'a, które w zapisie macierzowym ma postać:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}$$

lub krócej:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\,\boldsymbol{\sigma}$$

gdzie $\mathbf{C}$ jest macierzą podatności będącą odwrotnością macierzy sztywności.

Podstawiając wartości liczbowe, otrzymujemy

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}476 & -0{,}143 & -0{,}143 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}143 & 0{,}476 & -0{,}143 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}143 & -0{,}143 & 0{,}476 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}619 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}619 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}619 \end{bmatrix} \cdot \frac{10^{-11}}{\text{GPa}} \begin{Bmatrix} 30 \\ 50 \\ 40 \\ 5 \\ 5 \\ 10 \end{Bmatrix} \cdot \text{MPa} = \begin{Bmatrix} 1{,}41 \\ 13{,}8 \\ 7{,}60 \\ 3{,}09 \\ 3{,}09 \\ 6{,}19 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-5}$$

ZADANIE 6. Dla materiału o parametrach E=210 GPa (modułu Younga) i ν=0,3 (współczynnik Poissona) zapisać macierz sztywności. Dla składowych stanu odkształcenia $\varepsilon_x = 8{,}0 \cdot 10^{-5}$, $\varepsilon_y = 9{,}0 \cdot 10^{-5}$, $\gamma_{xy} = 3{,}0 \cdot 10^{-5}$, $\varepsilon_z = 8{,}5 \cdot 10^{-5}$, $\gamma_{yz} = 3{,}5 \cdot 10^{-5}$, $\gamma_{xz} = 4{,}0 \cdot 10^{-5}$ obliczyć składowe stanu naprężenia.

Rozwiązanie

W trójwymiarowym, stanie odkształcenia składowe tensora naprężenia obliczamy z uogólnionego prawa Hooke'a, które w zapisie macierzowym ma postać:

$$\left\{\begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{matrix}\right\} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \left\{\begin{matrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{matrix}\right\}$$

lub krócej:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}\, \boldsymbol{\varepsilon}$$

gdzie **c** jest macierzą sztywności.

Podstawiając wartości liczbowe, otrzymujemy

$$\left\{\begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{matrix}\right\} = 403{,}9 \text{ GPa} \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}2 \end{bmatrix} \left\{\begin{matrix} 8{,}0 \\ 9{,}0 \\ 8{,}5 \\ 3{,}0 \\ 3{,}5 \\ 4{,}0 \end{matrix}\right\} \cdot 10^{-5} = \left\{\begin{matrix} 43{,}82 \\ 45{,}43 \\ 44{,}63 \\ 2{,}423 \\ 2{,}827 \\ 3{,}231 \end{matrix}\right\} \text{MPa}\,.$$