Przykład 6.4. Równania równowagi wewnętrznej

Równania równowagi wewnętrznej mają postać:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+\rho X=0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+\rho Y=0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\rho Z=0$$

gdzie ρ jest gęstością materiału, natomiast *X, Y, Z* to składowe sił masowych odniesione do jednostki masy. Zatem siły masowe odniesione do jednostki objętości wynoszą ρX, ρY, ρZ. Siłą masową w zagadnieniach statyki może być ciężar materiału, w zagadnieniach dynamiki – siła d'Alemberta.

ZADANIE 1. Czy podane poniżej pola naprężeń (płaski stan naprężenia) mogą wystąpić w ciele sprężystym będącym w równowadze? Zakładamy, że siły masowe nie występują.

a) $[\sigma_{ij}]=\begin{bmatrix} c_1x+c_2y & c_5x-c_1y \\ c_5x-c_1y & c_3x-c_5y \end{bmatrix}$ b) $[\sigma_{ij}]=\begin{bmatrix} -\frac{3}{2}x^2y^2 & xy^3 \\ xy^3 & -\frac{1}{4}y^4 \end{bmatrix}$

Rozwiązanie

a) Sprawdzamy czy równania równowagi wewnętrznej są spełnione:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}=c_1+0+0-c_1=0 \text{ – spełnione } \checkmark$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}=c_5+0+0-c_5=0 \text{ – spełnione } \checkmark$$

b) Sprawdzamy czy równania równowagi wewnętrznej są spełnione:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}=-3xy^2+3xy^2=0 \text{ – spełnione } \checkmark$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}=y^3-y^3=0 \text{ – spełnione} \checkmark$$

Odpowiedź: podane pola naprężeń mogą wystąpić w ciele sprężystym będącym w równowadze.

ZADANIE 2. Jakie są siły masowe, jeżeli wiadomo, że podane naprężenia opisują stan równowagi ciała sprężystego?

$$\sigma_x = -2x^2 + 3y - 5z \qquad \tau_{xy} = 2 + 4xy - 7$$
$$\sigma_y = -2y^2 \qquad \tau_{xz} = -3x + y + 1$$
$$\sigma_z = 3x + y - 6z - 5 \qquad \tau_{yz} = 0$$

Rozwiązanie
Podstawiamy naprężenia do równań równowagi wewnętrznej

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X = 0\,; \quad -4x + 4x + \rho X = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho X = 0\,,$$
$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho Y = 0\,; \quad 4y - 4y + \rho Y = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho Y = 0\,,$$
$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z = 0\,; \quad -3 + 0 - 6 + \rho Z = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho Z = 9\,.$$

Odpowiedź: siły masowe wynoszą $\rho X = 0$, $\rho Y = 0$, $\rho Z = 9$.