Przykład 6.5. Zadania do samodzielnego rozwiązania

ZADANIE 1. Dla następującego stanu naprężenia

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 14 & 0 \\ 14 & 0 & 14 \\ 0 & 14 & 0 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}$$

obliczyć naprężenia główne. Zilustrować stan naprężenia na rysunku w układzie wyjściowym oraz po obrocie do osi głównych.

ZADANIE 2. Dla podanych tensorów naprężenia wyznaczyć: naprężenia główne i odpowiadające im kierunki główne; wektory naprężenia $\overline{p}_n$, wektory naprężenia normalnego $\overline{\sigma}_n$ oraz wektory naprężenia stycznego $\overline{\tau}_n$ w przekroju określonym wektorem normalnym $\overline{n}$.

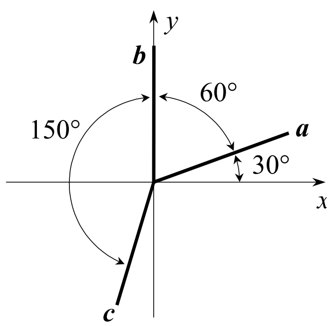
$$\text{a)}\quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}, \quad \overline{n} = [1,\, 2,\, -3] \;;$$

$$\text{b)}\quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}, \quad \overline{n} = [\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}]$$

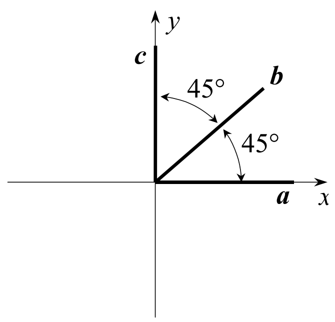
$$\text{c)}\quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}, \quad \overline{n} = [1, -1].$$

ZADANIE 3. W pewnym punkcie na powierzchni ciała określono stan odkształcenia, mierząc wydłużenia ε_a, ε_b, ε_c w trzech kierunkach: *a*, *b*, *c*. Znaleźć składowe stanu odkształcenia w układzie osi *xy* oraz odkszałcenia główne.

a)



b)



ZADANIE 4. Sprawdzić, czy poniższe związki mogą opisywać stan naprężenia dla ciała będącego w równowadze, gdy składowe sił masowych f_i=0

a) $\sigma_x = 7y^2 - 5$, $\sigma_y = -5y$, $\tau_{xy} = 5x + 8$;

b) $\sigma_{11} = 6x_3 + x_2$, $\sigma_{22} = 4x_1 x_2$, $\sigma_{33} = 4$, $\sigma_{12} = -10$, $\sigma_{13} = 8x_2 x_3 + x_1$, $\sigma_{23} = -8x_1^2 + x_2$.

ZADANIE 5. Sprawdzić, czy następujące równania mogą opisywać stan odkształcenia:

a) $\varepsilon_{11} = kx_3^2\left(x_1^2 + x_2^2\right)$, $\varepsilon_{22} = kx_3^2$, $\varepsilon_{12} = kx_1 x_2$, $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$.

b) $\varepsilon_{11} = 4\left(x_1^2 + x_2^2\right)$, $\varepsilon_{22} = kx_3^2$, $\varepsilon_{12} = 5x_1 x_2$, $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$.

<u>Wskazówka</u>: Wykorzystać równania nierozdzielności odkształceń:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z} \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y}$$

ZADANIE 6. Jaki warunek musi spełniać funkcja $\varphi(x_1, x_2)$, aby poniższe równania mogły opisywać stan odkształcenia

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}, \quad \varepsilon_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0.$$

ZADANIE 7. Dla pola przemieszczeń opisanego funkcjami:

a) $u_1 = 2x_1^2 + 3x_2 - 2x_3$, $u_2 = x_2^2 - 3x_3$, $u_3 = -x_3^2 + 2x_1 + 3x_2$

b) $u_1 = 4x_1^2 x_3$, $u_2 = 2x_2^2 + x_1 x_3$, $u_3 = -2x_1 + 6x_3^2$.

c) $u_1 = 4x_1^2 - x_1 x_2$, $u_2 = -3x_1 + x_2^2$, $u_3 = 0$

znaleźć tensor naprężenia w punkcie o współrzędnych (1,2,3), naprężenia główne w tym punkcie, siły masowe, składowe wektora naprężenia na płaszczyźnie o równaniu x_2= 2. Materiał jest izotropowy, a stałe sprężystości wynoszą: E, ν.