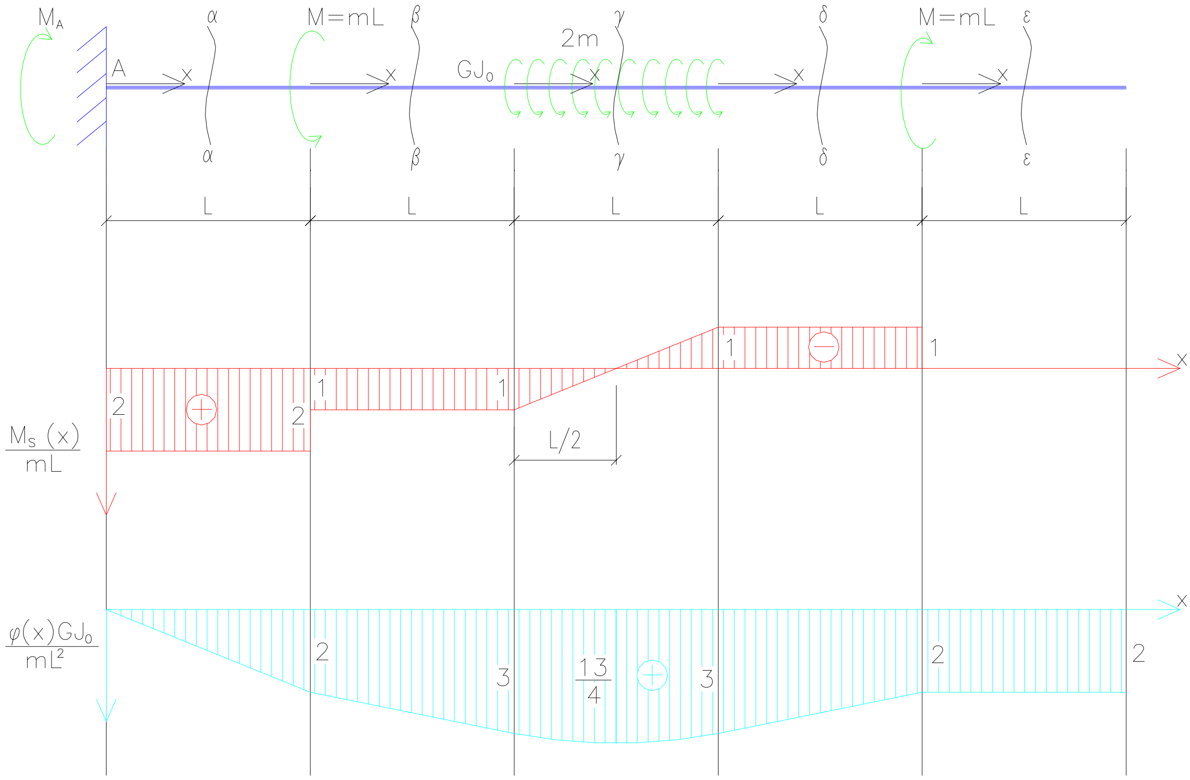
Przykład 7.1. Skręcanie pręta – zadanie statycznie wyznaczalne

Sporządzić wykresy momentu skręcającego i kąta skręcenia dla pręta o schemacie statycznym przedstawionym na rysunku 1.



Rysunek 1. Pręt skręcany

Niewiadomy moment M_A obliczymy z warunku równowagi::

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0\;;\;\; M_A - ml - m\,2l + ml = 0 \tag{1}$$

$$M_A = 2ml$$

Momenty skręcające w przekrojach $\alpha - \alpha$, $\beta - \beta$, . . . obliczymy korzystając z definicji tych wielkości. Moment skręcający w przekroju poprzecznym pręta równy jest liczbowo algebraicznej sumie momentów względem osi pręta od wszystkich sił występujących po jednej stronie tego przekroju. Za dodatni przyjmuje się taki moment, który działa na przekrój obracając go przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Otrzymujemy

$$\begin{gathered}
\alpha - \alpha \;\;;\;\; 0 \le x < l\,,\;\; M_S(x) = M_A = 2ml\,,\\
\beta - \beta \;\;;\;\; 0 < x < l\,,\;\; M_S(x) = M_A - M = 2ml - ml = ml\,,\\
\gamma - \gamma \;\;;\;\; 0 \le x \le l\,,\;\; M_S(x) = M_A - M - 2mx = ml - 2mx\,,\\
\delta - \delta \;\;;\;\; 0 \le x < l\,,\;\; M_S(x) = M_A - M - 2ml = -ml\,,\\
\varepsilon - \varepsilon \;\;;\;\; 0 < x \le l\,,\;\; M_S(x) = M_A - M - 2ml + M = 0\,.
\end{gathered} \tag{2}$$

Przyjęto tu zmienną x mierzoną od końca poprzedniego przedziału do początku następnego. Tak, więc przekrój $x = l - 0$ przedziału $\alpha - \alpha$ jest przekrojem $x = 0^{+}$ przedziału $\beta - \beta$. W przekrojach obciążonych momentem skupionym mamy nieciągłość funkcji $M_S(x)$, dlatego przedziały zmiennej x zawierają ostre nierówności. Widzimy, że $M_S(x)$ są funkcjami stałymi lub liniowymi.

Kąt skręcenia pręta obliczymy ze wzoru:

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \frac{M_S(x)}{GJ_0} dx \tag{3}$$

W poszczególnych przekrojach otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
\alpha - \alpha \ &: \varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \frac{2ml}{GJ_0} dx = \frac{2ml}{GJ_0} x \ ; \ \varphi(l) = \frac{2ml^2}{GJ_0}, \\
\beta - \beta \ &: \varphi(x) = \frac{2ml^2}{GJ_0} + \int_0^x \frac{ml}{GJ_0} dx = \frac{2ml^2}{GJ_0} + \frac{ml}{GJ_0} x \ ; \ \varphi(l) = \frac{3ml^2}{GJ_0}, \\
\gamma - \gamma \ &: \varphi(x) = \frac{3ml^2}{GJ_0} + \int_0^x \frac{(ml - 2mx)}{GJ_0} dx = \frac{3ml^2}{GJ_0} + \frac{ml}{GJ_0} x - \frac{m}{GJ_0} x^2 \ ; \\
&\varphi\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{13ml^2}{4GJ_0} = \varphi_{\max} \ , \ \varphi(l) = \frac{3ml^2}{GJ_0}, \\
\delta - \delta \ &: \varphi(x) = \frac{3ml^2}{GJ_0} - \int_0^x \frac{ml}{GJ_0} dx = \frac{3ml^2}{GJ_0} - \frac{ml}{GJ_0} x \ ; \ \varphi(l) = \frac{2ml^2}{GJ_0}, \\
\varepsilon - \varepsilon \ &: \varphi(x) = \frac{2ml^2}{GJ_0} + 0 = \frac{2ml^2}{GJ_0}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Zauważmy, że maksymalny kąt skręcenia występuje w przedziale $\gamma - \gamma$, gdzie występuje obciążenie momentem ciągłym, w przekroju x=l/2, w którym $M_S = 0$. Z zależności:

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{M_S(x)}{GJ_0} \tag{5}$$

wynika, że gdy $M_S(x_0) = 0$, to $\varphi(x_0) = \varphi_{ekstr.}$.

Zauważmy, że w przekrojach obciążonych skupionymi momentami występują skoki momentów skręcających, zaś funkcja $\varphi(x)$ jest w tych punktach nieróżniczkowalna.

Mamy: maks $M_s = 2ml$, maks $\varphi = \dfrac{13ml^2}{4GJ_0}$.

Zakładając, że mamy do czynienia z przekrojem kołowym, dla którego wskaźnik na skręcanie wynosi $W_S = \dfrac{\pi d^3}{16}$ obliczymy:

$$\tau_{\max} = \frac{maksM_S}{W_S} = \frac{32}{\pi} \frac{ml}{d^3} \tag{6}$$

Kryteria wytrzymałości i sztywności pozwalają na określenie jednej z dwóch wielkości m lub d, gdy dane są G, k_s (materiał) i długość l pręta:

$$\frac{32}{\pi}\frac{ml}{d^3} \le k_S\,,\quad \frac{13ml^2}{4G}\frac{32}{\pi d^4} = \frac{104}{\pi}\frac{ml^2}{Gd^4} \le \varphi_{dop}\,. \tag{7}$$