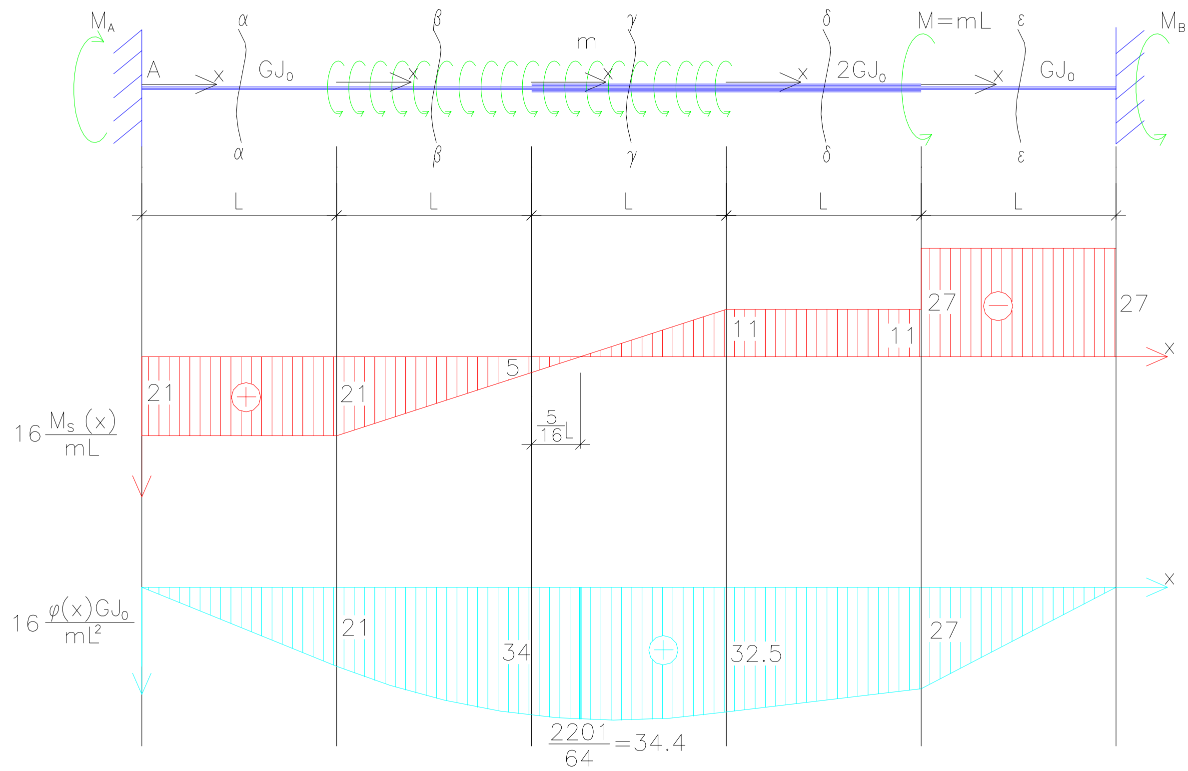
Przykład 7.2. Skręcanie pręta – zadanie statycznie niewyznaczalne

Przedstawić wykresy momentu skręcającego i kąta skręcenia pręta zamocowanego sztywno na obu końcach według schematu statycznego



Rysunek 1. Pręt skręcany

Równanie równowagi:

$$M_A - M_B - m\,2l - ml = 0\,,\ M_A - M_B = 3ml\,. \tag{1}$$

Zadanie jest statycznie niewyznaczalne; dwie niewiadome M_A i M_B, a tylko jedno równanie (1). Dodatkowe równanie otrzymamy z warunków:

$$\varphi_A = 0 \ \ i \ \ \varphi_B = 0 \tag{2}$$

Pierwszy z tych warunków służy do obliczenia $\varphi(x)$, gdyż $\varphi_A = \varphi(0)$. Natomiast drugi warunek $\varphi_B = 0$ jest dodatkowym równaniem dla obliczenia momentów w zamocowaniach.

Obliczamy, kolejno:

$$\alpha-\alpha\ ;\ 0 \le x \le l\,,\ M_S(x) = M_A,$$

$$\varphi(x) = \frac{M_A x}{GJ_0}\,,\ \varphi(l) = \frac{M_A l}{GJ_0}\,;$$

$$\beta-\beta\ ;\ 0 \le x \le l\,,\ M_S(x) = M_A - mx\,,$$

$$\varphi(x) = \frac{M_A l}{GJ_0} + \frac{M_A x}{GJ_0} - \frac{mx^2}{2GJ_0}\,,\ \varphi(l) = \frac{2M_A l}{GJ_0} - \frac{ml^2}{2GJ_0}\,;$$

$$\gamma-\gamma\ ;\ 0 \le x \le l\,,\ M_S(x) = M_A - ml - mx\,, \tag{3}$$

$$\varphi(x)=\frac{2M_A l}{GJ_0}-\frac{ml^2}{2GJ_0}+\frac{M_A-ml}{2GJ_0}x-\frac{mx^2}{4GJ_0}\ ,\ \varphi(l)=\frac{5M_A l}{2GJ_0}-\frac{5ml^2}{4GJ_0};$$

$$\delta-\delta\ ;\ 0\le x<l\ ,\ M_S(x)=M_A-2ml\ ,$$

$$\varphi(x)=\frac{5M_A l}{2GJ_0}-\frac{5ml^2}{4GJ_0}+\frac{M_A x}{2GJ_0}-\frac{2ml}{2GJ_0}x\ ,\ \varphi(l)=\frac{3M_A l}{GJ_0}-\frac{9ml^2}{4GJ_0};$$

$$\varepsilon-\varepsilon\ ;\ 0\le x\le l\ ,\ M_S(x)=M_A-3ml\ ,$$

$$\varphi(x)=\frac{3M_A l}{GJ_0}-\frac{9ml^2}{4GJ_0}+\frac{M_A-3ml}{GJ_0}x\ ,\ \varphi(l)=\frac{4M_A l}{GJ_0}-\frac{21ml^2}{4GJ_0}.$$

Oczywiście $\varphi(l)$ dla przedziału $\varepsilon-\varepsilon$ jest kątem skręcenia φ_B, który musi być równy zeru. Zatem,

$$\frac{4M_A l}{GJ_0}-\frac{21ml^2}{4GJ_0}=0. \tag{4}$$

Równania (1) i (4) dają rozwiązanie:

$$\begin{aligned} M_A &= \frac{21}{16}ml,\\ M_B &= -\frac{27}{16}ml \end{aligned} \tag{5}$$

Z równań (3) i (5) obliczamy:

$$\begin{aligned}
&\alpha-\alpha\ ;\ M_S(x)=\frac{21}{16}ml\ ,\ \varphi(l)=\frac{21}{16}\frac{ml^2}{GJ_0};\\
&\beta-\beta\ ;\ M_S(x)=\frac{21}{16}ml-mx\ ,\ M(l)=\frac{5}{16}ml\ ,\ \varphi(l)=\frac{17}{8}\frac{ml^2}{GJ_0};\\
&\gamma-\gamma\ ;\ M_S(x)=\frac{5}{16}ml-mx\ ,\ M(l)=-\frac{11}{16}ml\ ,\ \varphi(l)=\frac{65}{32}\frac{ml^2}{GJ_0};\\
&\delta-\delta\ ;\ M_S(x)=-\frac{11}{16}ml\ ,\ \varphi(l)=\frac{27}{16}\frac{ml^2}{GJ_0};\\
&\varepsilon-\varepsilon\ ;\ M_S(x)=-\frac{27}{16}ml\ ,\ \varphi(l)=0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Ekstremalny kąt skręcenia występuje w przekroju $\gamma-\gamma$ i wynosi:

$$\varphi\left(\frac{5}{16}l\right)=\frac{2201}{1024}\frac{ml^2}{GJ_0}. \tag{7}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \text{maks}\, M_S &= \frac{27}{16}ml\\ \text{maks}\, \varphi &= \frac{2201}{1024}\frac{ml^2}{GJ_0}. \end{aligned} \tag{8}$$