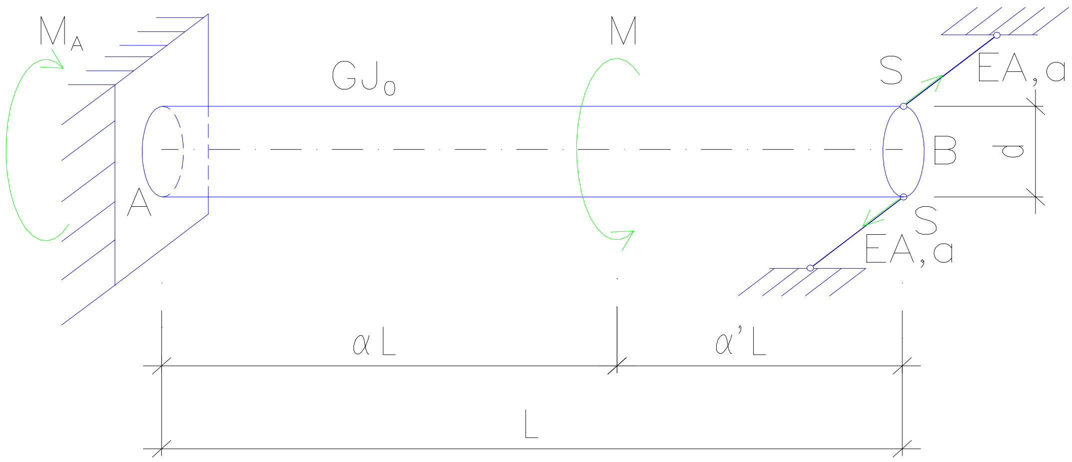
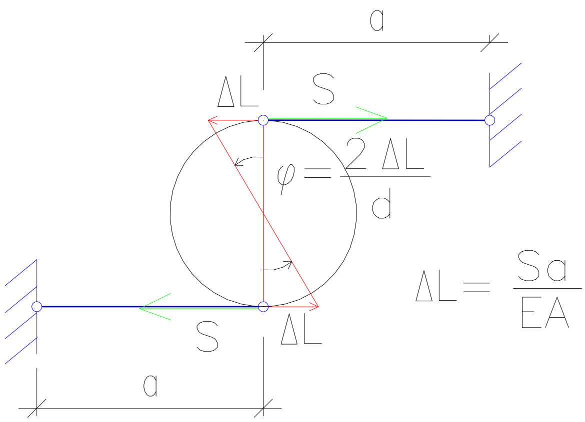
Przykład 7.3. Skręcanie pręta sprężyście zamocowanego

Rozwiązać zagadnienie pręta skręcanego zamocowanego sztywno na jednym końcu i sprężyście na drugim.



Rysunek 1. Pręt skręcany



Rysunek 2. Przekrój pręta w punkcie B

Warunek równowagi:

$$M_A - M + Sd = 0. \tag{1}$$

Warunki zgodności przemieszczeń:

$$\varphi_A = 0 \;\; i \;\; \varphi_B = \varphi(l) = \frac{2\Delta l}{d} \tag{2}$$

Obliczymy:

$$\varphi_B = \frac{M_A l}{GJ_0} - \frac{M\alpha' l}{GJ_0}\ ,\ \ \varphi_B = \frac{2}{d}\frac{Sa}{EA} \tag{3}$$

Zatem,

$$\frac{M_A l}{GJ_0} - \frac{M\alpha' l}{GJ_0} = \frac{2}{d}\frac{Sa}{EA} \tag{4}$$

lub

$$M_A - M\alpha' = \frac{2}{d}\frac{SaGJ_0}{EAl}\ \text{ i }\ M_A - M = -Sd\ . \tag{5}$$

Odejmując stronami powyższe równania otrzymujemy:

$$M\alpha = S\left(d + 2\frac{a}{d}\frac{G}{E}\frac{J_0}{Al}\right). \tag{6}$$

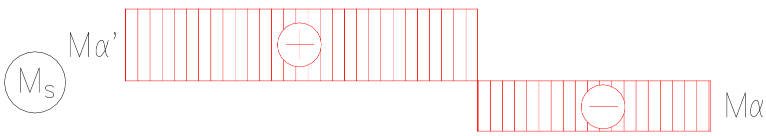
Tak, więc:

$$S = M\alpha\frac{1}{d + 2\frac{a}{d}\frac{J_0}{Al}\frac{G}{E}}\ ,\ \ M_A = M\left(1 - \frac{\alpha d}{d + 2\frac{a}{d}\frac{J_0}{Al}\frac{G}{E}}\right) \tag{7}$$

Mamy dwa graniczne przypadki szczególne:

1. $K_s = GJ_0 / l << K_r = EA/a$, tzn. sztywność pręta rozciąganego jest wyraźnie większa od sztywności pręta skręcanego. Wtedy rozwiązania dążą do:

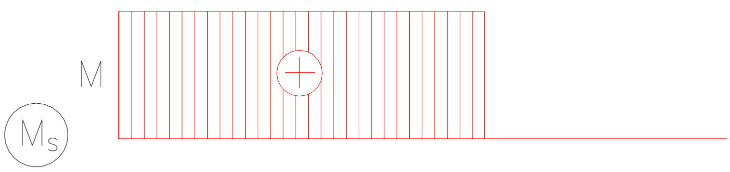
$$Sd = M\alpha\ ,\ \ M_A = M\,\alpha' \tag{8}$$



Rysunek 3. Wykres momentu skręcającego

2. $K_s = GJ_0 / l >> K_r = EA/a$, tzn. mamy przypadek odwrotny. Wtedy rozwiązania dążą do

$$Sd \to \frac{M\alpha}{2}\frac{K_r}{K_s}d^2 \to 0\ ,\ \ M_A = M \tag{9}$$



Rysunek 4. Wykres momentu skręcającego

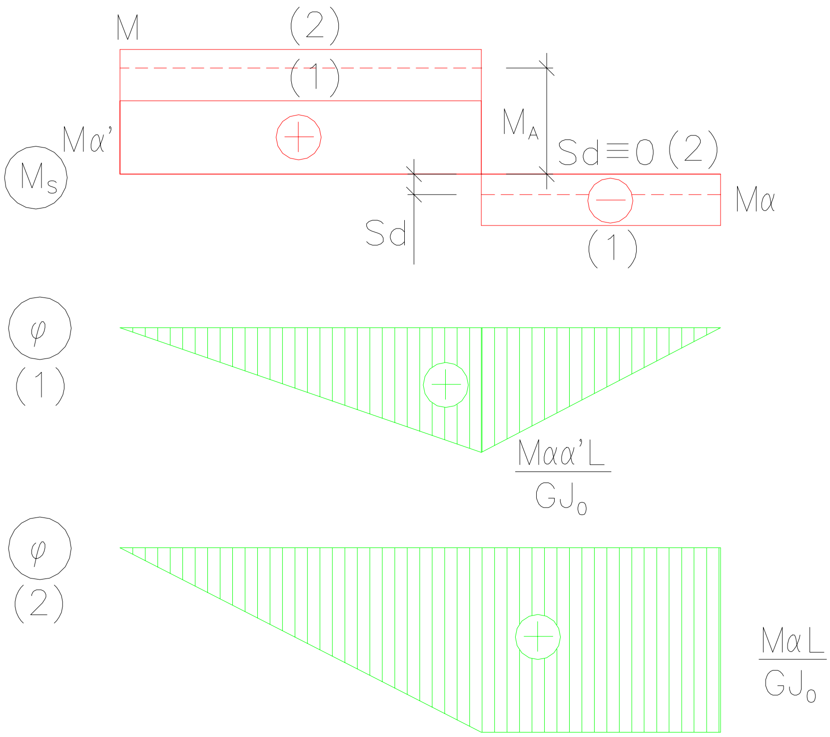
W ogólnym przypadku mamy:

$$Sd = M\alpha \frac{1}{1+2\dfrac{1}{d^2}\dfrac{K_s}{K_r}}, \quad M_A = M\left(1-\frac{\alpha}{1+2\dfrac{1}{d^2}\dfrac{K_s}{K_r}}\right), \tag{10}$$

gdzie

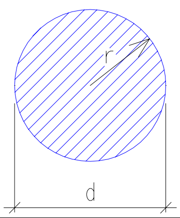
$$K_s = \frac{GJ_0}{l}, \quad K_r = \frac{EA}{a} \tag{9}$$

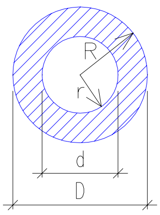
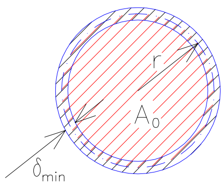
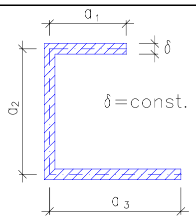
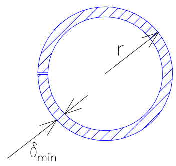
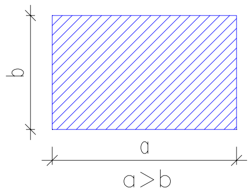
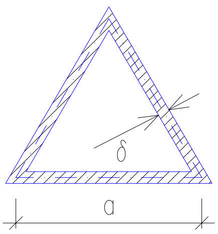
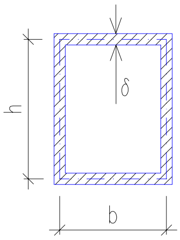
są sztywnościami pręta skręcanego i rozciąganego, odpowiednio. Wykresy momentu skręcającego i kąta skręcenia mają postać:



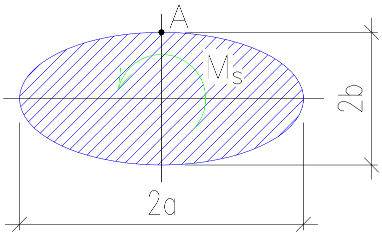
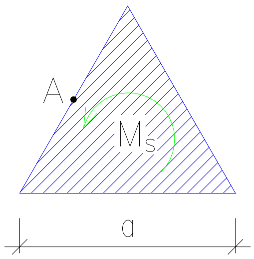
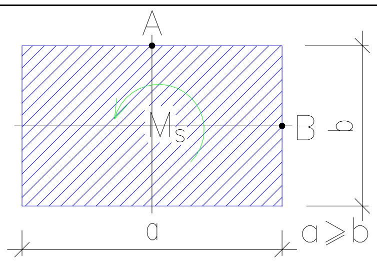
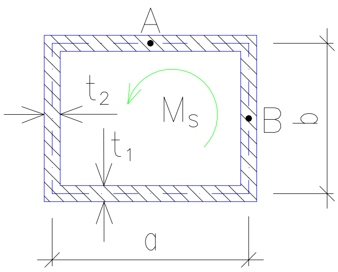
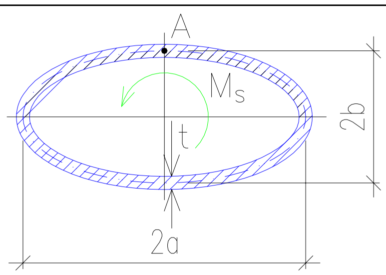
Rysunek 5. Wykresy momentu skręcającego i kąta skręcenia

Tablica 1 Charakterystyki geometryczne przekroju w zagadnieniu skręcania:

Przekrój	Moment bezwładności	Wskaźnik wytrzymałości
	$J_0 = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$	$W_S = \frac{J_0}{r} = \frac{\pi r^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16}$

	$J_0=\frac{\pi R^4}{2}\frac{\pi r^2}{2}=\frac{\pi R^4}{2}\left(1-m^4\right)$ $J_0=\frac{\pi D^4}{32}\left(1-m^4\right)$, $m=\frac{r}{R}=\frac{d}{D}<1$	$W_S=\frac{\pi R^3}{2}\left(1-m^4\right)$, $W_S=\frac{\pi D^3}{16}\left(1-m^4\right)$
	$J_0=\frac{4A_0^2}{\oint\frac{ds}{\delta(s)}}$, $J_0=\frac{4A_0^2\delta}{2\pi r}=2\pi r^3\delta$, $\delta=const$	$W_S=2A_0\delta_{\min}$, $W_S=2A_0\delta$, $\delta=const$
	$J_S=\frac{1}{3}\delta^3\sum_{i=1}^{3}a_i$	$W_S=\frac{J_S}{\delta_{\min}}$, $W_S=\frac{1}{3}\delta^2\sum_{i=1}^{3}a_i$
	$J_S=\frac{1}{3}\delta^3 2\pi r=\frac{2}{3}\pi\delta^3 r$	$W_S=\frac{2}{3}\pi\delta^2 r$
	$J_{skr}\cong\frac{ab^3}{3}\cdot$ $\cdot\left[1-0.63\frac{b}{a}+0.052\left(\frac{b}{a}\right)^5+\dots\right]$ $J_{skr}=0.141a^4$, a=b	$W_{skr}\cong\frac{a^2b^2}{3a+1.8b}$, $W_{skr}=0.208a^3$, a=b
	$J_{skr}=\frac{4A_0^2}{\oint\frac{ds}{\delta(s)}}=\frac{4\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)^2}{\frac{3a}{\delta}}=\frac{1}{4}a^3\delta$ $J_{skr}=\frac{1}{40}a^4$, $\delta=\frac{1}{10}a$	$W_{skr}=2A_0\delta=2\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\delta=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\delta$ $W_{skr}=\frac{\sqrt{3}}{20}a^3$, $\delta=\frac{1}{10}a$
	$J_{skr}=\frac{4A_0^2}{\oint\frac{ds}{\delta(s)}}=\frac{4b^2h^2}{\frac{2h+2b}{\delta}}=2\frac{b^2h^2}{h+b}\delta$	$W_{skr}=2A_0\delta=2bh\delta$

Tablica 2 Naprężenia styczne i kąty skręcenia w zagadnieniu skręcania pręta o różnych przekrojach:

Przekrój poprzeczny	Naprężenia styczne τ	Kąt skręcenia na jednostkę długości φ
	$\tau_A = \dfrac{2M_S}{\pi a b^2}$	$\dfrac{a^2+b^2}{\pi a^3 b^3}\dfrac{M_S}{G}$
	$\tau_A = \dfrac{20M_S}{a^3}$	$\dfrac{46.2}{a^4}\dfrac{M_S}{G}$
	$* \ \tau_A = \dfrac{M_S}{\alpha a b^2}, \ \tau_B = \gamma \tau_A$	$* \ \dfrac{1}{\beta a b^3}\dfrac{M_S}{G}$
	$\tau_A = \dfrac{M_S}{2abt_1}$ $\tau_B = \dfrac{M_S}{2abt}$	$\dfrac{at+bt_1}{2tt_1 a^2 b^2}\dfrac{M_S}{G}$
	$\tau_A = \dfrac{M_S}{2\pi a b t}$	$\dfrac{\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}}{4\pi a^2 b^2 t}\dfrac{M_S}{G}$

*) gdzie:

a/b	β	α	γ
1.0	0.141	0.208	0.208
2.0	0.229	0.246	0.309
3.0	0.281	0.282	0.379
∞	1/3	1/3	0.422