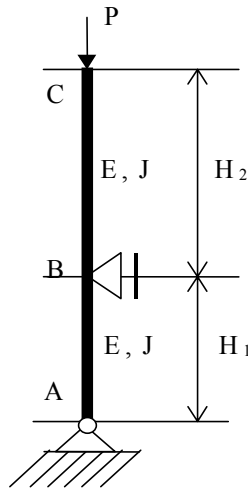


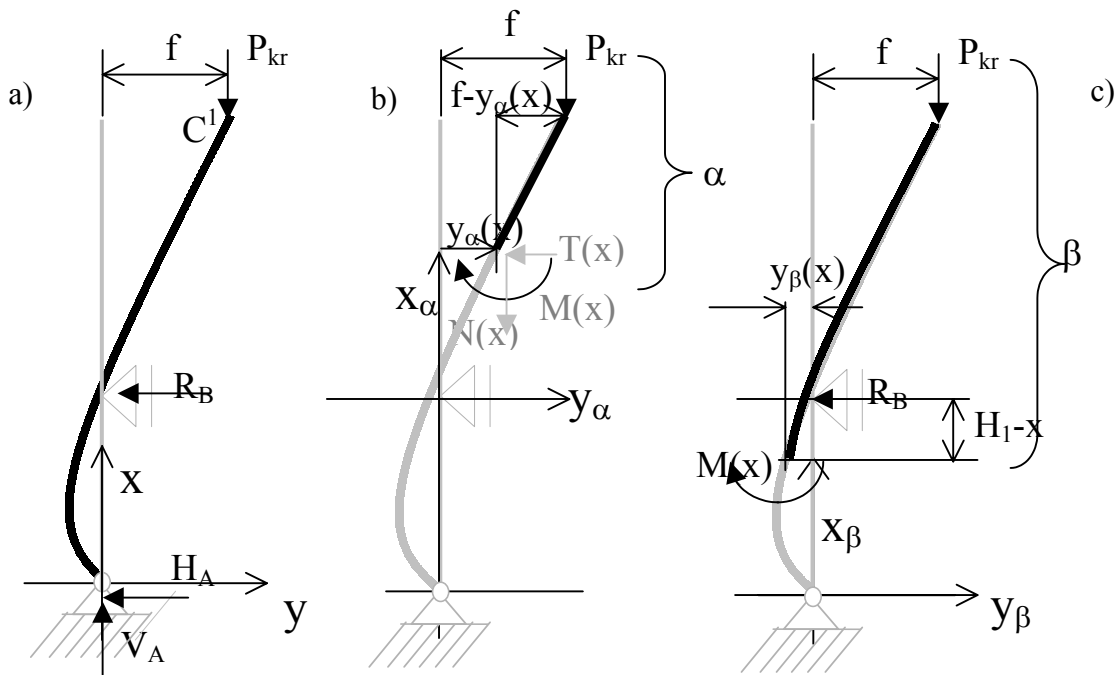
Przykład 9.1. Wyboczenie słupa o dwóch przesłach

Wyznaczyć wartość krytyczną siły P obciążającej głowicę słupa przebiegającego w sposób ciągły przez dwie kondygnacje budynku. Słup jest zamocowany w fundamencie. Przyjmujemy, że działanie stropu w poziomie piętra można interpretować jako podparcie nieprzesuwne. Głowica słupa ma swobodę przemieszczeń. W płaszczyźnie prostopadłej do rysunku słup usztywniony jest ścianą. Wysokości kondygnacji wynoszą H_1 i H_2 . Moduł bezwładności przekroju wynosi J zaś moduł Younga materiału słupa jest E . Do obliczeń przyjąć $H_1 = H_2 = L$.



Rysunek 9.1. Schemat statyczny słupa

1. Kinematycznie dopuszczalna (zgodna z więzami) postać odkształcona analizowanej struktury:



Rysunek 2. a) postać przyjętej, zgodnej z więzami linii ugięcia; b) ilustracja zapisu równowagi fragmentu α osi ugiętej słupa (jego górnej części); c) ilustracja zapisu równowagi fragmentu β osi ugiętej słupa;

2. Równania równowagi dowolnego odkształconego fragmentu struktury

Wobec tego, że w słupie wyróżnia się dwa przedziały w których równania momentów zginających są różnymi funkcjami zmiennej niezależnej x , należy rozpatrzyć te dwa przypadki w zapisie warunków równowagi odkształconego fragmentu struktury. Podział na przedziały pokazany jest na rysunku 2.

Zauważmy, że układ współrzędnych dla części α (x_α, y_α) ma początek w punkcie B (podpora) zaś układ współrzędnych dla części β (x_β, y_β) ma początek w punkcie A (podstawa słupa).

Zadanie jest statycznie wyznaczalne wobec tego łatwo jest obliczyć reakcje:

$$\begin{aligned} \text{Suma momentów względem punktu A daje:} & R_B H_1 = P_{kr} f \Rightarrow R_B = P_{kr} f / H_1 \\ \text{Suma rzutów sił na oś poziomą daje:} & H_A = -P_{kr} f / H_1 \\ \text{Suma rzutów sił na oś pionową daje:} & V_A = P_{kr} \end{aligned}$$

Dla części α piszemy sumę momentów względem punktu o współrzędnej x_α (w ten sposób w równaniu nie pojawią się siły tnące i normalna w tym punkcie):

$$M(x) + P_{kr}(f - y_\alpha(x)) = 0 \Rightarrow M(x) = P_{kr}(y_\alpha(x) - f) \Rightarrow$$

ponieważ: $M(x) = -y_\alpha''(x)EJ$ wobec tego:

$$y_\alpha''(x)EJ = P_{kr}(f - y_\alpha(x)) \Rightarrow y_\alpha''(x)EJ + P_{kr}y_\alpha(x) = P_{kr}f$$

po uporządkowaniu otrzymujemy równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu:

$$y_\alpha''(x) + k^2 y_\alpha(x) = k^2 f \quad (1)$$

oznaczono tu (jak zawsze w zagadnieniach wyboczenia)

$$k^2 = \frac{P_{kr}}{EJ} \quad (2)$$

Rozwiązaniem tego równania ma następującą postać (jak wiadomo z podstawowego kursu matematyki i co łatwo sprawdzić przez podstawienie (3) do (1)):

$$y_\alpha(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) + y_{szcz}(x).$$

Ponieważ $y_{szcz}(x) = f$ więc ostatecznie:

$$y_\alpha(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) + f \quad (3)$$

Zasady ustalania $y_{szcz}(x)$ dla równania różniczkowego niejednorodnego należy przypomnieć sobie z kursu podstawowego matematyki. W zagadnieniach związanych z wyboczeniem wyraz wolny w równaniu różniczkowym jest najczęściej wielomianem. Wobec tego rozwiązanie szczególne też ma postać wielomianu o nieznanach współczynnikach. Współczynniki te łatwo jest ustalić porównując wielomiany po prawej i lewej stronie równania różniczkowego.

Zapis sumy momentów dla części β :

$$M(x) + P_{kr}(f + (-y_\beta(x))) - P_{kr} \frac{f}{H_1}(H_1 - x) = 0 \Rightarrow M(x) + y_\beta(x)P_{kr} + P_{kr} \frac{f}{H_1}x = 0$$

We wzorze powyższym uwzględniono fakt, że ugięcie na rysunku 1.c. jest ujemne i wzięto $y(x)$ ze znakiem „-”. Można sprawdzić poprawność tego równania pisząc wyrażenia na moment dla dolnej części słupa, poniżej odcinka β . Można w tym wypadku, dla uniknięcia kłopotów ze znakami, narysować „lustrzane odbicie” względem osi AC rysunku 1.c. Wtedy założone ugięcie y będzie dodatnie. Zaleca się wykonać takie sprawdzenie.

Po przekształceniach takich jak dla części α otrzymuje się równanie różniczkowe (4):

$$y''_{\beta}(x)EJ + P_{kr}y_{\beta}(x) = P_{kr} \frac{f}{H_1} x \Rightarrow y''_{\beta}(x) + k^2 y_{\beta}(x) = k^2 \frac{f}{H_1} x \quad (4)$$

Jego rozwiązaniem jest funkcja: $y_{\beta}(x) = C \cos(kx) + D \sin(kx) + y_{szcz}(x)$

Ponieważ w tym przypadku $y_{szcz}(x) = \frac{f}{H_1} x$

wiec ostatecznie:

$$y_{\beta}(x) = C \cos(kx) + D \sin(kx) + \frac{f}{H_1} x \quad (5)$$

Trzy warunki brzegowe i dwa warunki zszycia pozwalają napisać pięć równań z pięcioma niewiadomymi stałymi A, B, C, D, f:

$$y_{\beta}(x_{\beta}=0) = 0 \Rightarrow C = 0 \quad (6)$$

$$y_{\beta}(x_{\beta}=H_1) = 0 \Rightarrow D \sin(kH_1) + f = 0 \quad (\text{uwzględniono } C=0) \quad (7)$$

$$y_{\alpha}(x_{\alpha}=0) = 0 \Rightarrow A + f = 0 \Rightarrow A = -f \quad (8)$$

$$y'_{\beta}(x_{\beta}=H_1) = y'_{\alpha}(x_{\alpha}=0) \Rightarrow Dk \cos(kH_1) + \frac{f}{H_1} = Bk \quad (9)$$

$$y_{\alpha}(x_{\alpha}=H_2) = f \Rightarrow -f \cos(kH_2) + B \sin(kH_2) = 0 \quad (\text{uwzględniono } (8)) \quad (10)$$

Jak widać z warunku (6) stała C jest równa zero niezależnie od wartości pozostałych stałych, stałą A wyeliminowano przy pomocy równania (8).

3. Obliczenie wyznacznika układu równań

Po uporządkowaniu i przedstawieniu w formie macierzowej równań (6)-(10) otrzymujemy następujący, jednorodny układ równań:

$$\begin{bmatrix} 0 & \sin(kH_1) & 1 \\ -k & k \cos(kH_1) & 1/H_1 \\ \sin(kH_2) & 0 & -\cos(kH_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B \\ D \\ f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Rozwiązanie trywialne: $A=B=C=D=f=0$ przedstawia prostą oś słupa i przypadek czystego ściskania.

Warunkiem istnienia rozwiązania nietrywialnego jest zerowanie się wyznacznika macierzy wyrazów przy niewiadomych (należy przypomnieć sobie z kursu matematyki odpowiednie twierdzenie o istnieniu rozwiązania układu równań liniowych). Otrzymujemy z tego warunku następujące równanie przestępne:

$$W = -kH_1 \sin(kH_1) \cos(kH_2) + \sin(kH_2) \sin(kH_1) - kH_1 \sin(kH_2) \cos(kH_1) = 0 \quad (12)$$

Określmy zmienną bezwymiarową t :

$$t = kH_1 \quad (13)$$

(t jest tu zmienną pomocniczą, nie ma ona, oczywiście, nic wspólnego z czasem, tradycyjnie oznaczanym tym symbolem):

$$t \sin(t) \cos\left(\frac{H_2}{H_1} t\right) - \sin\left(\frac{H_2}{H_1} t\right) \sin(t) + t \sin\left(\frac{H_2}{H_1} t\right) \cos(t) = 0 \quad (14)$$

Ponieważ wyznacznik W zależy za pośrednictwem t od P_{kr} :

$$t = H_1 \sqrt{\frac{P_{kr}}{EJ}} \quad (15)$$

można znaleźć taką siłę P_{kr} , przy której wyznacznik ma swoje miejsce zerowe.

Dalsze obliczenia wykonano dla szczególnego przypadku $H_1=H_2=L$. Jeśli $H_2/H_1=1$ to wyznacznik przyjmuje prostą postać (16).

$$(2t \cos(t) - \sin(t)) \sin(t) = 0 \quad (16)$$

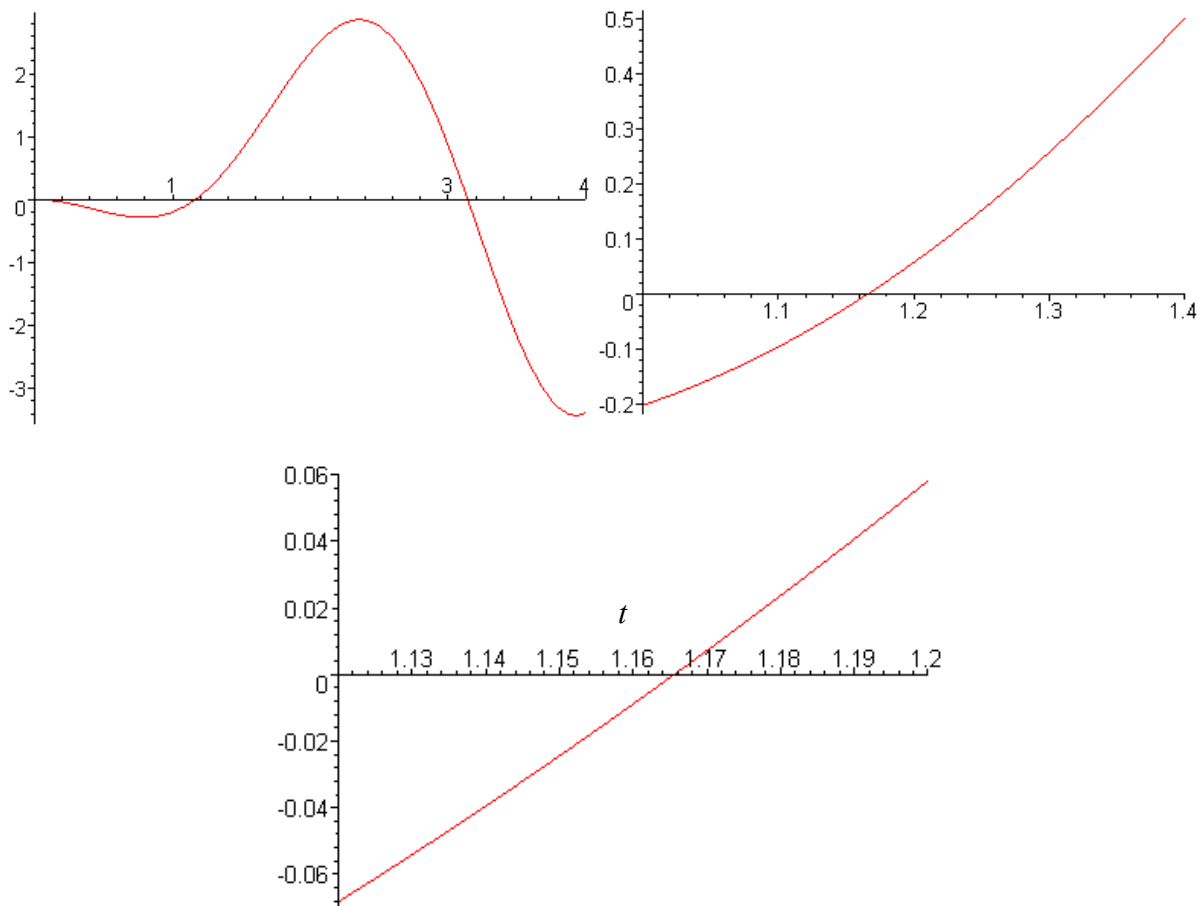
Jego miejsce zerowe jest łatwe do znalezienia klasycznymi metodami numerycznymi.

Ponieważ jednak wykres wyznacznika w funkcji t jest łatwy do narysowania, najprościej jest odczytać wartość t_0 z tego wykresu. Poniższe wykresy wykonane są przy użyciu programu do obliczeń symbolicznych Maple. Równie dobrze można zastosować w tym celu dowolny arkusz kalkulacyjny. Odczytując z rysunku 3 miejsce zerowe wyznacznika układu równań (11):

$$t_0 = 1.166$$

pamiętając o podstawieniu (15) i o tym, że $H_1=L$, otrzymujemy wartość siły krytycznej:

$$P_{kr} = EJ \frac{1.166^2}{L^2} = 1.36 \frac{EJ}{L^2} \quad (17)$$



Rysunek 3. a) wykres wartości wyznacznika w funkcji t , b) oraz c) przedstawiają zbliżenia otoczenia pierwszego miejsca zerowego

Siła ta jest o wiele mniejsza niż siła dla belki wolnopodpartej, wynoszącej $P_{kr} = EJ \frac{\pi^2}{L^2}$ a także mniejsza niż siła krytyczna dla wspornika $P_{kr} = EJ \frac{\pi^2}{(2L)^2} = EJ \frac{1.57^2}{L^2}$.

Porównanie z tymi dwoma wartościami jest motywowane „podobieństwem” schematów dwóch części słupa. Dolna jest belka wolnopodparta, jednak możliwość wychylenia siły obciążającej z jej osi (dzięki części górnej słupa) powoduje zwiększenie momentu i przez to zmniejszenie wartości krytycznej siły. Podobnie górna, „wspornikowa” część słupa jest bardziej podatna gdyż dolne przęsło pozwala na obrót w punkcie B, realizując „podatne” zamocowanie górnego przęsła. Zaleca się samodzielne sprawdzenie do jakiej wartości zmierza siła krytyczna gdy H_2 dąży do zera.

4. Sprawdzenie

Podane poniżej sprawdzenie poprawności obliczeń przyczyni się do lepszego ich zrozumienia. Dla wartości t_0 układ równań (11) może mieć niezerowe rozwiązanie. Załóżmy, że ustalonym parametrem w tym układzie będzie strzałka ugięcia wierzchołka słupa f . Przyjmijmy $f=1.0$. Wtedy z pierwszego równania układu równań (18) obliczymy D, z trzeciego obliczymy B zaś równanie drugie powinno być spełnione tożsamościowo (dla każdego t , które nie jest rozwiązaniem równania przestępnego (16), równanie drugie będzie sprzecznością).

$$\begin{bmatrix} 0 & \sin(t_0) & 1 \\ -t_0 & t_0 \cos(t_0) & 1 \\ \sin\left(\frac{H_2}{H_1} t_0\right) & 0 & -\cos\left(\frac{H_2}{H_1} t_0\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B \\ DH_1 \\ f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

Ponieważ sprawdzenia dokonamy nie na liczbach ogólnych ale dla szczególnej, przybliżonej wartości t_0 , równanie drugie będzie spełnione jedynie w przybliżeniu. Jego błąd pozwoli nam ocenić, na ile precyzyjne było rozwiązanie równania przestępnego (16). W poniższych rachunkach przyjęto $H_1=1.0$ m, $H_2=H_1=1.0$ m.

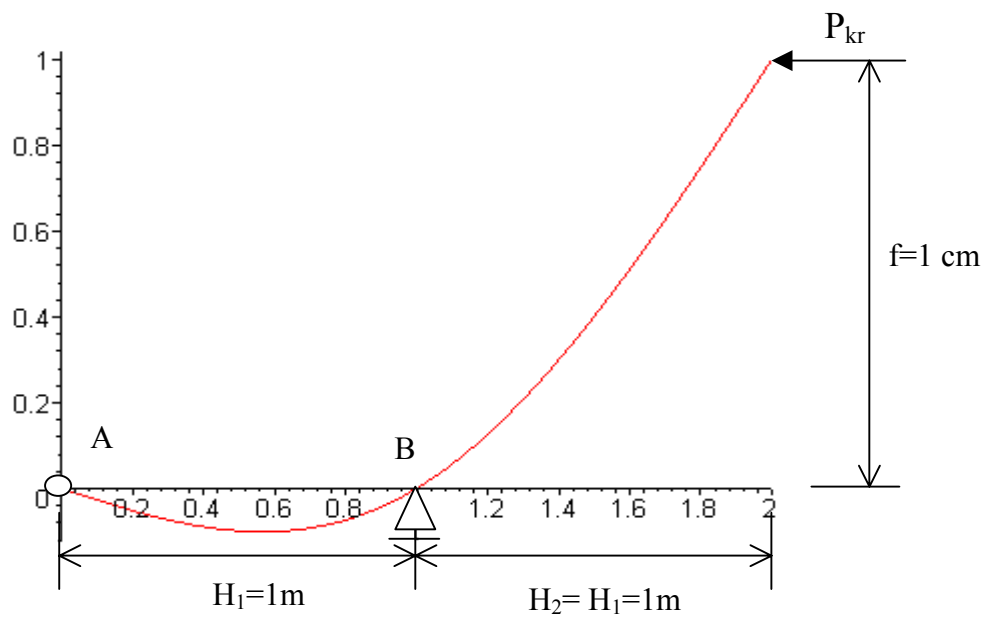
$$D \sin(1.166) + 1 = 0 \quad \text{—} \quad D = -1.0879$$

$$B \sin(1.166) - \cos(1.166) = 0 \quad \text{—} \quad B = 0.42846$$

$$-1.166B + D \cos(1.166) + 1 = 0 \quad \text{—} \quad 0.500417 - 0.4996 = 0 \quad \text{—} \quad \text{błąd} = 0.000835$$

Dokładność odczytu t_0 jest więc bardzo dobra (jak łatwo zauważyć, błąd jest małym ułamkiem strzałki ugięcia f).

Mając obliczone B, D oraz przyjęty parametr f możemy znaleźć postać linii ugiętej belki (słupa) podczas wyboczenia, posługując się wzorami (3) i (5). Zauważmy, że linia ta nie jest wyznaczona jednoznacznie. Jest ona funkcją niewiadomego, arbitralnie przyjętego parametru f , który pełni rolę czynnika „skalującego”. Linia ugięcia podczas wyboczenia belki jest proporcjonalna do narysowanej na rysunku 4. Rysunek ten należy wyobrazić sobie jako obrócony o 90 stopni i dopiero wtedy porównać z rysunkami 2.a. – 2.c.



Rysunek 4. Wykres linii proporcjonalnej do linii wyboczenia osi słupa (belki) podczas utraty stateczności przy ściskaniu. Rysunek ten należy skojarzyć z rysunkami nr 2, pamiętając, że pionowa oś słupa została tu narysowana poziomo.