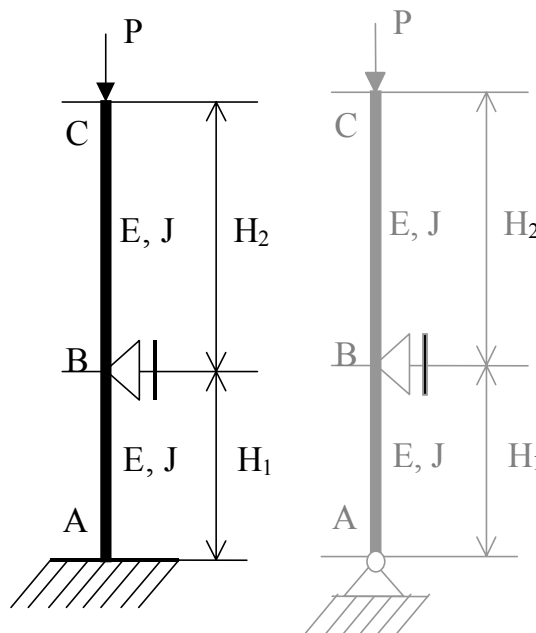


## Przykład 9.2. Wyboczenie słupa o dwóch przęsłach utwierdzonego w fundamencie

Wyznaczyć wartość krytyczną siły  $P$  obciążającej głowicę słupa, dla słupa przebiegającego w sposób ciągły przez dwie kondygnacje budynku. Słup jest utwierdzony w fundamencie. Przyjmujemy, że działanie stropu w poziomie piętra można interpretować jako podparcie nieprzesuwne, głowica słupa ma swobodę przemieszczeń. Porównać sposób rozwiązania i wyniki otrzymane dla zadania opisanego w przykładzie nr1. Wysokości kondygnacji wynoszą  $H_1$  i  $H_2$ . Moduł bezwładności przekroju wynosi  $J$  zaś moduł Younga materiału słupa jest  $E$ . Do obliczeń przyjmując  $H_1=5L$ ,  $H_2=L$ . W ramach samodzielnego ćwiczenia wykonać obliczenia dla przykładu nr 1, przyjmując takie same wartości  $H_1$  i  $H_2$ . W płaszczyźnie prostopadłej do rysunku słupy usztywnione są ścianą.



Rysunek 1. Schemat statyczny słupa utwierdzonego w fundamencie oraz przypomnienie schematu słupa omówionego w przykładzie nr 9.1.

### 1. Równania równowagi dowolnego odkształconego fragmentu struktury

Wobec tego, że w słupie wyróżnia się dwa przedziały w których równania momentów zginających są różnymi funkcjami  $x$ , należy rozpatrzyć dwa przypadki w zapisie warunków równowagi odkształconego fragmentu struktury. Podział na przedziały pokazany jest na rysunku 2.

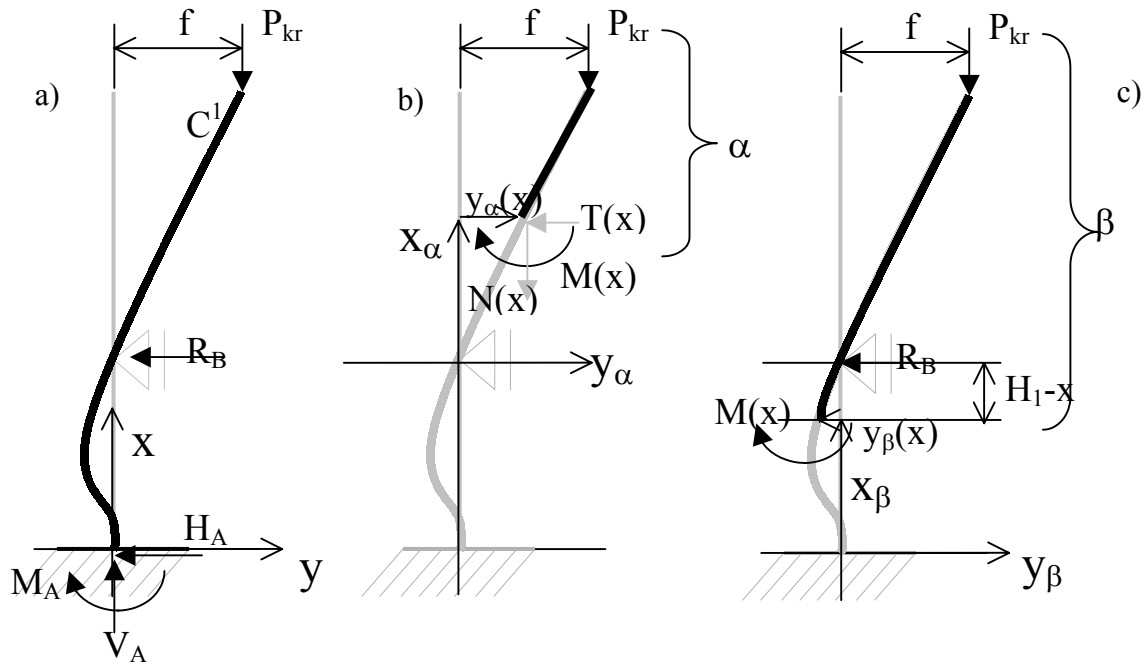
Zauważmy, że układ współrzędnych dla części  $\alpha$  ( $x_\alpha, y_\alpha$ ) ma początek w punkcie B (podpora) zaś układ współrzędnych dla części  $\beta$  ( $x_\beta, y_\beta$ ) ma początek w punkcie A (podstawa słupa).

Zapis sumy momentów dla części  $\alpha$  (górnej):

$$M(x) + P_{kr}(f - y_\alpha(x)) = 0 \Rightarrow M(x) = P_{kr}(y_\alpha(x) - f) \quad (1)$$

ponieważ:  $M(x) = -y_\alpha''(x)EJ$

$$\Rightarrow y_\alpha''(x)EJ = P_{kr}(f - y_\alpha(x)) \Rightarrow y_\alpha''(x)EJ + P_{kr}y_\alpha(x) = P_{kr}f$$



Rysunek 2. a) postać przyjętej deformacji zgodnej z więzami, b) ilustracja zapisu równowagi fragmentu  $\alpha$  osi ugiętej słupa (jego górnej części); c) ilustracja zapisu równowagi fragmentu  $\beta$  osi ugiętej słupa;

po uporządkowaniu otrzymujemy równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu:

$$y''_{\alpha}(x) + k^2 y_{\alpha}(x) = k^2 f \quad (2)$$

oznaczono tu:

$$k^2 = \frac{P_{kr}}{EJ} \quad (3)$$

Rozwiązaniem tego równania ma następującą postać (co łatwo sprawdzić przez podstawienie (4) do (2)):

$$y_{\alpha}(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) + y_{szcz}(x) \quad (4)$$

ponieważ  $y_{szcz}(x) = f$  więc ostatecznie rozwiązaniem (2) jest:

$$y_{\alpha}(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) + f \quad (5)$$

Do tego momentu obliczenia przebiegają tak jak w rozwiązaniu zadania 9.1. Jednak w dalszym ciągu wystąpią różnice wynikające z faktu, że zadanie 9.2. jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalne. Reakcje nie dadzą się wyznaczyć z równań statyki, pozostają obecne w równaniach linii ugięcia i wymagają dodatkowego warunku kinematycznego.

Suma momentów dla części  $\beta$ :

$$M(x) + P_{kr}(f - y_{\beta}(x)) - R_B(H_1 - x) = 0 \quad (6)$$

$$\Rightarrow y''_{\beta}(x)EJ + P_{kr}y_{\beta}(x) = P_{kr}f - R_B(H_1 - x)$$

po uporządkowaniu otrzymujemy równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu dla linii ugięcia w przedziale  $\beta$ :

$$y''_{\beta}(x) + k^2 y_{\beta}(x) = k^2 f - \frac{R_B}{EJ}(H_1 - x) \quad (7)$$

Rozwiązaniem tego równania ma następującą postać:

$$y_\beta(x) = C \cos(kx) + D \sin(kx) + y_{szcz}(x) \quad (8)$$

Rozwiązanie szczególne przewidujemy w formie wielomianu zmiennej  $x$ . Łatwo sprawdzić przez podstawienie, że ma on następującą postać:

$$y_{szcz}(x) = f - \frac{R_B}{k^2 EJ} (H_1 - x) \quad (9)$$

Ostatecznie rozwiązanie równania różniczkowego w przedziale  $\beta$  dane jest wyrażeniem (10):

$$y_\beta(x) = C \cos(kx) + D \sin(kx) + f - \frac{R_B}{k^2 EJ} (H_1 - x) \quad (10)$$

Cztery warunki brzegowe i dwa warunki zszycia pozwalają napisać sześć równań z sześcioma niewiadomymi stałymi  $A, B, C, D, f, R_B$ :

$y_\alpha(x=0)=0$	ugięcie (obliczone ze wzory dla górnej części słupa) jest równe zeru na podporze B
$y_\alpha(x=H_2)=f$	Ugięcie wyobczonej osi pod siłą skupioną jest równe założonej wartości $f$
$y'_\beta(x=H_1)=y'_\alpha(x=0)$	kąt obrotu obliczony ze wzory dla górnej części słupa jest taki sam jak kąt obrotu obliczony ze wzory dla dolnej części słupa
$y_\beta(x=0)=0$	ugięcie równe zeru w utwierdzeniu A
$y'_\beta(x=0)=0$	zerowy kąt obrotu w utwierdzeniu A
$y_\beta(x=H_1)=0$	ugięcie (obliczone ze wzoru dla dolnej części słupa) równe zeru na podporze B

Uwzględniając postaci rozwiązań (5) i (10), otrzymujemy układ równań:

$$y_\alpha(x=0)=0 \quad \Rightarrow \quad 0 = A + f \quad \Rightarrow \quad A = -f \quad (11)$$

$$y_\alpha(x=H_2)=f \quad \Rightarrow \quad 0 = A \cos(kH_2) + B \sin(kH_2) \quad \Rightarrow \quad B = f \operatorname{ctg}(kH_2) \quad (12)$$

$$y'_\beta(x=H_1)=y'_\alpha(x=0) \quad \Rightarrow \quad -C \sin(kH_1) + D \cos(kH_1) + \frac{R_B}{k^3 EJ} = f \operatorname{ctg}(kH_2) \quad (13)$$

$$y_\beta(x=0)=0 \quad \Rightarrow \quad C + f - \frac{R_B H_1}{k^2 EJ} = 0 \quad (14)$$

$$y_\beta(x=H_1)=0 \quad \Rightarrow \quad 0 = C \cos(kH_1) + D \sin(kH_1) + f \quad (15)$$

$$y'_\beta(x=0)=0 \quad \Rightarrow \quad D = -\frac{R_B}{k^3 EJ} \quad (16)$$

Z równań (11),(12),(16) obliczono  $A, B$  i  $D$ . Podstawienie tych wartości do równań (13),(14) i (15) daje układ równań (17) z trzema niewiadomymi:  $C, f, R_B$ . W ten sposób zmniejszono ilość równań aby móc łatwo zapisać wzór na ich wyznacznik główny.

$$\begin{bmatrix} k \sin(kH_1) & \frac{\cos(kH_1)}{k^2 EJ} - \frac{1}{k^2 EJ} & k \operatorname{ctg}(kH_2) \\ 1 & \frac{-H_1}{k^2 EJ} & 1 \\ \cos(kH_1) & \frac{\sin(kH_1)}{k^3 EJ} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C \\ R_b \\ f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Jak widać, otrzymany układ równań jest jednorodny (wektor prawej strony jest wektorem zerowym). Oznacza to, że wartości niewiadomych  $f=0, C=0, R_B=0$ , a również  $A=B=D=0$  –

spełniają ten układ równań. Oś słupa jest wtedy linią prostą. Istnienie niezerowego rozwiązania jest możliwe tylko wtedy, gdy wyznacznik macierzy współczynników przy niewiadomych zeruje się. Ponieważ wyznacznik ten zależy od  $k$ , można znaleźć taką siłę  $P_{kr}$ , przy której wyznacznik ma swoje miejsce zerowe.

## 2. Zapisanie wyznacznika układu równań:

Wyznacznik układu trzech równań można w tym zadaniu policzyć ręcznie w sposób klasyczny.

$$W = \frac{kH_1 \sin(kH_1) \sin(kH_2) - 2 \sin(kH_2) + 2 \cos(kH_1) \sin(kH_2) + \cos(kH_2) \sin(kH_1) - kH_1 \cos(kH_1) \cos(kH_2)}{\sin(kH_2) k^2 EJ}$$

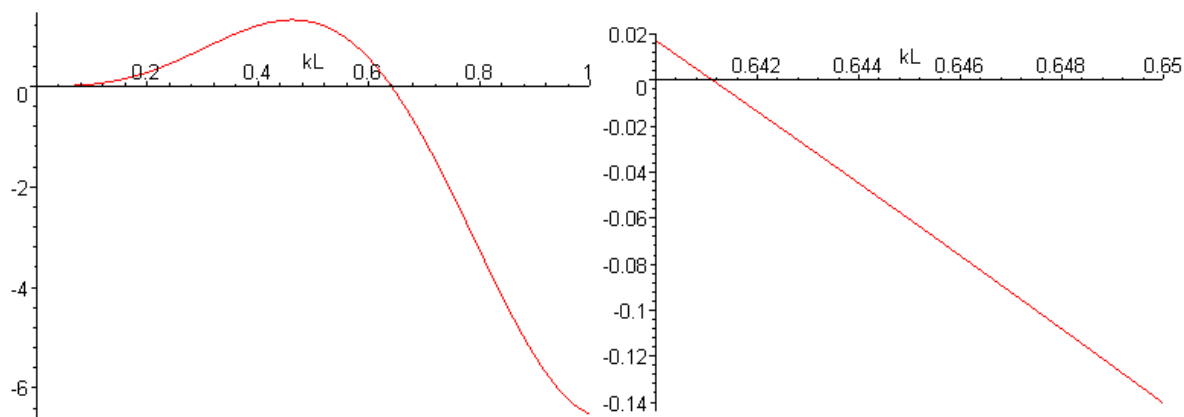
Warunek istnienia niezerowych rozwiązań układu równań (17)  $W=0$  będzie spełniony, gdy znajdziemy miejsce zerowe funkcji:

$$W = kH_1 (\sin(kH_1) \sin(kH_2) - \cos(kH_1) \cos(kH_2)) - 2 \sin(kH_2) + 2 \cos(kH_1) \sin(kH_2) + \cos(kH_2) \sin(kH_1) \quad (18)$$

Miejsce zerowe znajdziemy posługując się wykresem funkcji  $W(k)$ . Wykres taki łatwo otrzymać używając dowolnego arkusza kalkulacyjnego. Wobec tego mniejsze znaczenie ma przekształcanie wyrażenia (18) tak, aby zmniejszyć liczbę składników sumy i uzyskać formy iloczynowe funkcji trygonometrycznych kombinacji liniowych argumentów  $kH_1$  i  $kH_2$ . W tym opracowaniu użyto programu do wykonywania obliczeń symbolicznych Maple. W dalszych obliczeniach skupiono uwagę na szczególnym przypadku gdy przyjąć  $H_1=5L$ ,  $H_2=L$ . Proporcje wysokości obu kondygnacji pokazane są na rysunku 4. Warunek (18) przybiera wtedy postać następującą:

$$W = 5kL (\sin(5kL) \sin(kL) - \cos(5kL) \cos(kL)) - 2 \sin(kL) + 2 \cos(5kL) \sin(5kL) + \cos(5kL) \sin(kL) \quad (19)$$

Jego wykres przedstawiono na rysunku 3.



Rysunek 3. a) wykres wartości wyznacznika w funkcji  $kL$ , b) przedstawia zbliżenie otoczenia pierwszego miejsca zerowego

Odczytując z rysunku 3 miejsce zerowe wyznacznika układu równań (17):

$$kL = 0.641 \quad (20)$$

otrzymujemy wartość siły krytycznej:

$$P_{kr} = EJ \frac{0.641^2}{L^2} = 0.411 \frac{EJ}{L^2} \quad (21)$$

### 3. Dyskusja wyniku

Korzystając z tego, że w zadaniu nr 9.1 wszystkie obliczenia prowadzone były na liczbach ogólnych, łatwo jest teraz, w ramach samodzielnego ćwiczenia obliczyć siłę krytyczną dla wartości wysokości kondygnacji  $H_1=5L$ ,  $H_2=L$ . Powinno się otrzymać następujący wynik:

$$P_{kr} = EJ \frac{0.505^2}{L^2} = 0.255 \frac{EJ}{L^2}$$

Siła krytyczna (21) jest o około 60% większa od obliczonej dla zadania z przykładu nr 9.1. Należy to przypisać sztywniejszej dolnej części słupa (utwierdzenie zamiast zamocowania przegubowego). Różnica jest jednak mniejsza niż ta, która występuje pomiędzy siłą krytyczną dla schematu wolnopodpartego i schematu utwierdzenie-podpora przegubowa ( $1/0.699^2=2.02$ ). Przyczyną tego jest wysoka część słupa ponad podporą B pozwalająca na swobodne przemieszczanie się punktu przyłożenia siły. Widać to wyraźnie na rysunku 4 w sekcji poświęconej sprawdzeniu obliczeń.

### 4. Sprawdzenie

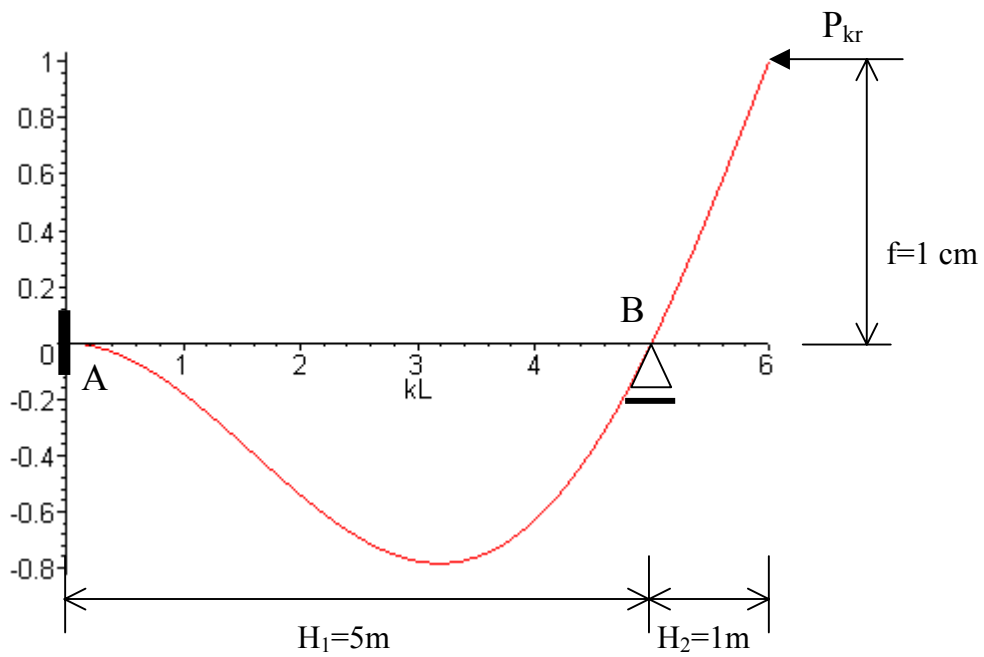
Dla wartości  $kL=0.641$  układ równań (17) może mieć niezerowe rozwiązanie. Załóżmy, że ustalonym, niezerowym elementem rozwiązania tego układu będzie strzałka ugięcia wierzchołka słupa  $f$ . Przyjmijmy  $f=1.0$ . Wtedy z układu dwóch równań: pierwszego i drugiego obliczymy  $C$  oraz  $R_B$ . Równanie trzecie powinno być spełnione tożsamościowo (dla każdego  $kL$ , które nie jest rozwiązaniem równania przestępnego (19), równanie to będzie sprzecznością). Ponieważ sprawdzenia dokonamy nie na liczbach ogólnych ale dla szczególnej, przybliżonej wartości  $kL=0.641$ , równanie trzecie będzie spełnione jedynie w przybliżeniu. Jego błąd pozwoli nam ocenić, na ile precyzyjne było rozwiązanie równania przestępnego (19). W poniższych rachunkach przyjęto  $H_1=5.0$  m,  $H_2=1.0$  m. Po obliczeniu wartości sinusa i cosinusa  $kL$  układ równań (17) przybiera następującą postać:

$$\begin{bmatrix} 0.0406 & 4.862 & -0.8591 \\ 1 & -12.169 & 1 \\ -0.9979 & 0.2406 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C \\ R_b \\ f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (22)$$

Rozwiązanie podukładu zbudowanego z pierwszych dwóch równań dla przyjętej strzałki ugięcia  $f=1.0$  jest następujące:

$$C=1.0439 \text{ oraz } R_B=0.1679. \text{ Błąd równania trzeciego wynosi } 0.001382.$$

Mając obliczone  $R_B$ ,  $C$  oraz przyjęty parametr  $f$  możemy znaleźć postać linii ugiętej belki (słupa) podczas wyboczenia, posługując się wzorami (5) i (10). Zauważmy, że linia ta nie jest wyznaczona jednoznacznie. Jest ona funkcją niewiadomego, arbitralnie przyjętego parametru  $f$ , który pełni rolę czynnika „skalującego”. Linia ugięcia podczas wyboczenia belki jest proporcjonalna do narysowanej na rysunku 4.



Rysunek 4. Wykres linii proporcjonalnej do linii wyboczenia osi słupa (belki) podczas utraty stateczności przy ściskaniu. Rysunek ten należy skojarzyć z rysunkami nr 2, pamiętając, że pionowa oś słupa została tu narysowana poziomo.