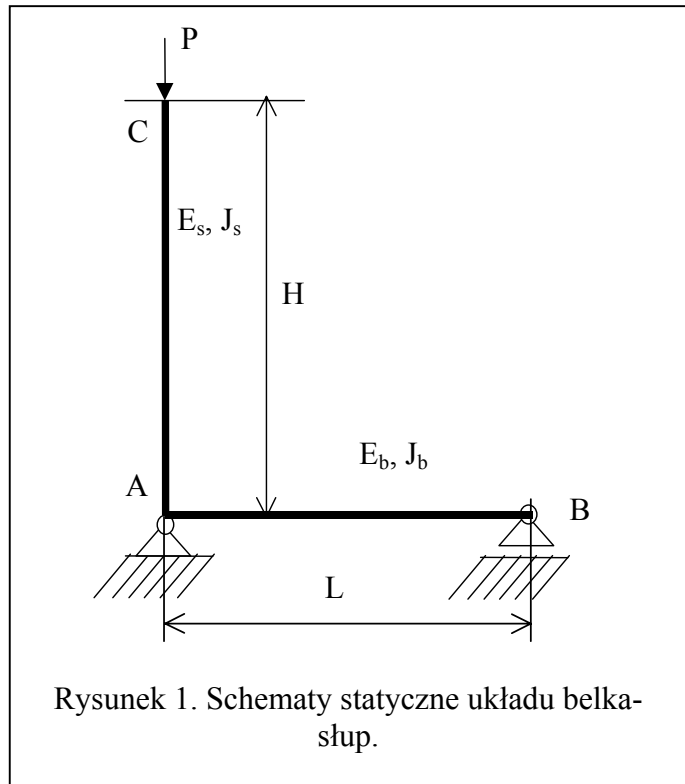
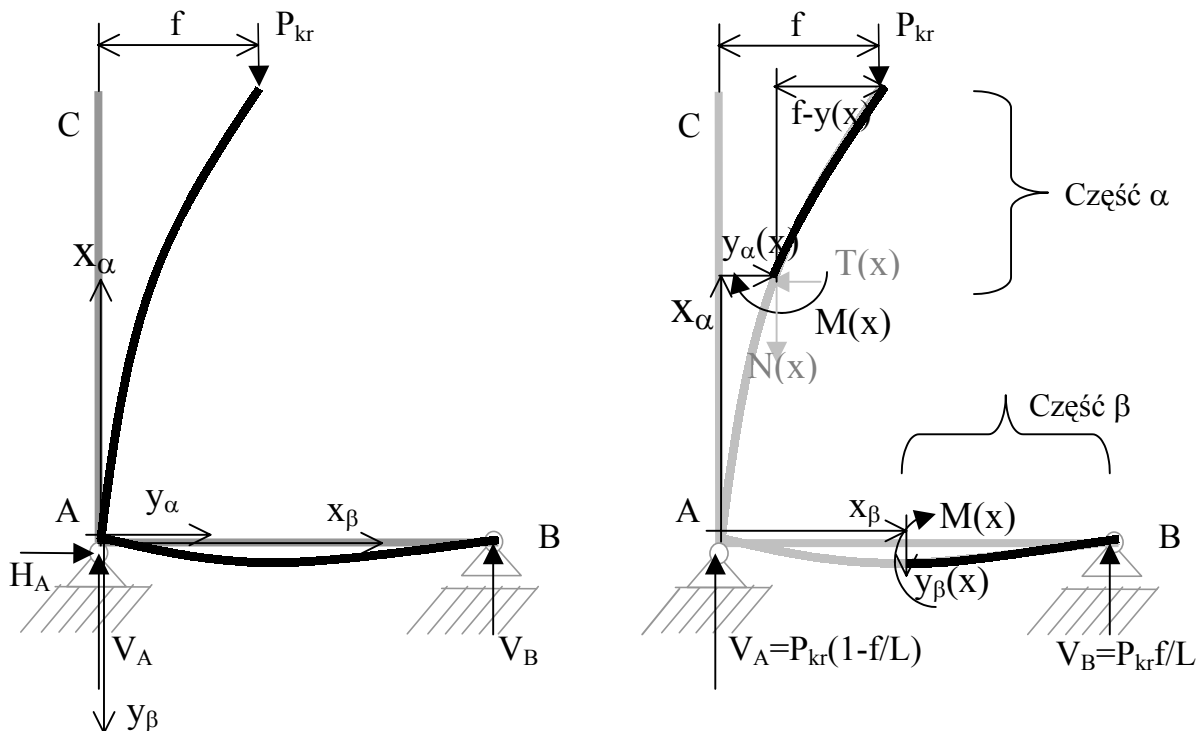


Przykład 9.3. Wyboczenie układu belka-słup

Wyznaczyć wartość krytyczną siły P obciążającej głowicę słupa. Słup jest częścią układu ramowego, którego drugim elementem jest belka pozioma. Węzeł słup-belka jest sztywny. Oznacza to, że obrót przekroju belki położonego nieskończenie blisko węzła jest równy obrotowi przekroju słupa sąsiadującego z tym węzłem. Fundament pod węzłem jest niepodatny, podpora B belki jest niepodatna, przesuwna. Przyjmując wysokość słupa H , długość belki L . Moduły bezwładności przekrojów słupa i belki wynoszą odpowiednio J_s i J_b zaś moduły Younga materiałów - E_s i E_b . W płaszczyźnie prostopadłej do rysunku słup i belka są usztywnione ścianą i stropem.



1. Kinematycznie dopuszczalna (zgodna z więzami) postać odkształcona analizowanej struktury:



Rysunek 2. Postać przyjętej deformacji zgodnej z więzami (część lewa); Ilustracja zapisu równowagi fragmentu α osi ugiętej słupa oraz fragmentu β (osi ugiętej belki) (część prawa);

2. Równania równowagi dla dowolnego, odkształconego fragmentu struktury:

Reakcje obliczymy biorąc pod uwagę sumę momentów względem punktu A dla odkształconej ramy wyobrażonej na Rys. 2:

$$V_B L = P_{kr} f \quad \Rightarrow \quad V_B = P_{kr} f / L$$

Reakcja w podporze A nie będzie potrzebna w dalszych obliczeniach. Z sumy rzutów na oś poziomą zauważamy, że jej składowa pozioma jest równa zero zaś z sumy rzutów sił na oś pionową wynika wartość V_A podana na Rys. 2.

Wobec tego, że w ramie wyróżnia się dwa jakościowo różne fragmenty, w których równania momentów zginających jako funkcji x są różne, należy rozpatrzyć dwa przypadki w zapisie warunków równowagi. Pierwszy z tych fragmentów to słup, drugi to belka. Zauważmy, że siła osiowa występuje tylko w słupie. Belka poddana jest tylko zginaniu, zależnemu jednak od siły krytycznej.

2.a. Dla części α (słup):

$$M(x) + P_{kr}(f - y_\alpha(x)) = 0 \quad \Rightarrow \quad M(x) = P_{kr}(y_\alpha(x) - f)$$

ponieważ: $M(x) = -y_\alpha''(x)E_s J_s$ otrzymuje się równanie różniczkowe dla osi ugiętej:

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_\alpha''(x)E_s J_s &= P_{kr}(f - y_\alpha(x)) \Rightarrow y_\alpha''(x)E_s J_s + P_{kr}y_\alpha(x) = P_{kr}f \Rightarrow \\ y_\alpha''(x) + k^2 y_\alpha(x) &= k^2 f \end{aligned} \quad (1)$$

oznaczono tu (jak zwykle w zagadnieniach wyboczenia)

$$k^2 = \frac{P_{kr}}{E_s J_s} \quad (2)$$

Rozwiązanie równania (1) jest postaci:

$$y_\alpha(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) + y_{szcz}(x)$$

ponieważ $y_{szcz}(x) = f$ więc ostatecznie:

$$y_\alpha(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) + f \quad (3)$$

2.b. Dla części β (belka):

Moment zapisać można (dla części prawej belki – patrz rysunek 2.) następująco:

$$M(x) = P_{kr} \frac{f}{L} (L - x) \quad (4)$$

$$\Rightarrow E_b J_b y_\beta''(x) = -P_{kr} \frac{f}{L} (L - x) \Rightarrow y_\beta''(x) = \frac{P_{kr}}{E_b J_b} \frac{f}{L} x - \frac{P_{kr}}{E_b J_b} f \Rightarrow$$

Otrzymane równanie różniczkowe zawiera tylko drugą pochodną linii ugięcia wobec tego rozwiązuje się je przez bezpośrednie całkowanie:

$$y_\beta(x) = \frac{P_{kr}}{E_b J_b} \frac{f}{L} \frac{x^3}{6} - \frac{P_{kr}}{E_b J_b} f \frac{x^2}{2} + Cx + D \quad (5)$$

Zauważmy, że całkowanie równania (4) odbyło się tak jak dla belki zginanej, bez wpływu siły osiowej na ugięcie (P_{kr} pojawia się tu jako składnik reakcji podpory, jest siłą poprzeczną).

Możemy obliczyć, stałe całkowania C i D , stawiając warunki, które linia ugięcia belki powinna spełnić:

$$\text{Ugięcie na podporze A równe zero} \Rightarrow y_\beta(x=0) = 0 \Rightarrow D = 0$$

Ugięcie na podporze B równe zero $\Rightarrow y_\beta(x=L)=0 \Rightarrow C = \frac{1}{3} \frac{P_{kr}}{E_b J_b} fL$

W równaniu (6) występuje teraz jedynie parametr geometryczny f oraz siła krytyczna:

$$y_\beta(x) = \frac{P_{kr}}{E_b J_b} \left(\frac{f}{L} \frac{x^3}{6} - f \frac{x^2}{2} + fL \frac{x}{3} \right) \quad (6)$$

3. Zapisanie układu równań dla obliczenia stałych A, B, f

Dwa warunki brzegowe dla słupa i warunek zszycia kąta obrotu przekrojów słupa i belki w punkcie A pozwalają napisać trzy równania z trzema niewiadomymi stałymi A, B, f:

Ugięcie osi słupa w punkcie A jest równe zero:

$$y_\alpha(x=0)=0 \Rightarrow A + f = 0$$

Ugięcie osi słupa w punkcie C jest równe przyjętemu parametrowi f:

$$y_\alpha(x=H)=f \Rightarrow A \cos(kH) + B \sin(kH) = 0$$

Kąty obrotu przekrojów słupa i belki w punkcie A są równe:

$$y'_\beta(x=0) = y'_\alpha(x=0) \quad (7)$$

Ponieważ:

$$y'_\alpha(x) = -Ak \sin(kx) + Bk \cos(kx); \text{ zaś } y'_\beta(x) = \frac{P_{kr}}{E_b J_b} \left(\frac{f}{L} \frac{x^2}{2} - fx + \frac{fL}{3} \right), \quad (8)$$

z (7) i (8) wynika równanie:

$$\frac{P_{kr}}{E_b J_b} \frac{fL}{3} = Bk \Rightarrow k^2 \frac{E_s J_s}{E_b J_b} \frac{fL}{3} = Bk \quad (9)$$

W równaniu (9) wyrażono P_{kr} poprzez k (podstawienie (2))

Po uporządkowaniu otrzymujemy układ równań jednorodnych:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \cos kH & \sin kH & 0 \\ 0 & -k & k^2 \frac{E_s J_s L}{3 E_b J_b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Rozwiązanie $A=0$, $B=0$ i $f=0$ możliwe jest zawsze i odpowiada ścisnaniu osiowemu słupa. Rozwiązanie niezerowe możliwe jest tylko dla takiej wartości parametru k , dla której wyznacznik główny układu równań (10) jest równy zero.

4. Zapisanie wyznacznika układu równań i obliczenie siły krytycznej

Posługując się dowolną metodą obliczamy wyznacznik główny układu (10):

$$D = k^2 \frac{E_s J_s L}{3 E_b J_b} \sin kH - k \cos kH \quad (11)$$

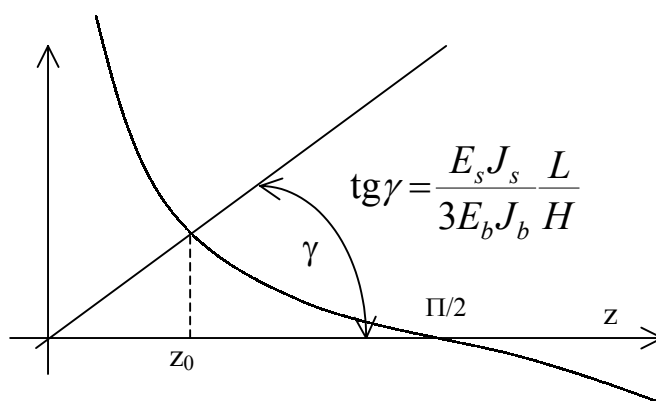
Warunek $D=0$ prowadzi do równania przestępnego:

$$k \frac{E_s J_s L}{3 E_b J_b} = \text{ctg } kH \quad (12)$$

podstawiając: $kH=z$ otrzymujemy:

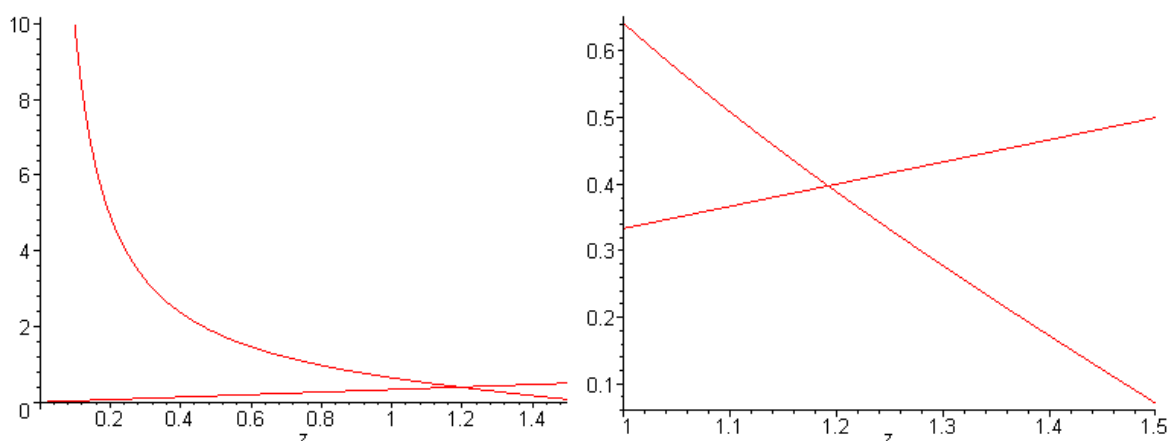
$$z \frac{E_s J_s}{3 E_b J_b} \frac{L}{H} = \text{ctg}(z) \quad (13)$$

Rozwiązanie można odczytać z wykresu pokazanego na rysunku (punkt przecięcia prostej i cotangensoidy):



Rysunek 3. Graficzny sposób wyznaczenia miejsca zerowego wyznacznika głównego układu równań (10). Rysunek ten pozwala również zrozumieć jak zmienia się jakościowo P_{kr} w zależności od proporcji parametrów charakteryzujących belkę i słup.

Dla szczególnego przypadku, gdy słup i belka wykonane są z tego samego materiału, mają identyczny przekrój zaś $L=H$, otrzymuje się następujący wykres:



Rysunek 4. Graficzny wyznaczenie miejsca zerowego wyznacznika głównego układu równań (10) dla szczególnych wartości parametrów fizycznych belki i słupa. Prawy wykres jest powiększeniem odpowiedniego fragmentu wykresu umieszczonego po lewej stronie. Wykresy te otrzymano przy pomocy programu MAPLE jednak można użyć dowolnego innego narzędzia numerycznego dla ich uzyskania.

z wykresu na rysunku 4b odczytano $z_0=1.19$. Stąd:

$$kH=1.19 \Rightarrow \frac{P_{kr}}{E_s J_s} = \left(\frac{1.19}{H}\right)^2 \quad P_{kr} = \frac{(1.19)^2}{H^2} E_s J_s = 1.461 \frac{E_s J_s}{H^2} \quad (14)$$

Zauważmy, że obliczona siła krytyczna jest mniejsza niż dla wspornika o wysokości H i sztywności $E_s J_s$. Z wzoru na wyznacznik widać, że jeśli sztywność belki jest wielokrotnie większa niż sztywność słupa, siła krytyczna zbliża się do siły krytycznej dla pręta wspornikowego i osiąga ją w granicy, gdy $E_s J_s / E_b J_b$ dąży do zera.

Poleca się wykonać samodzielnie sprawdzenie takie, jak w zadaniu 1 i 2.