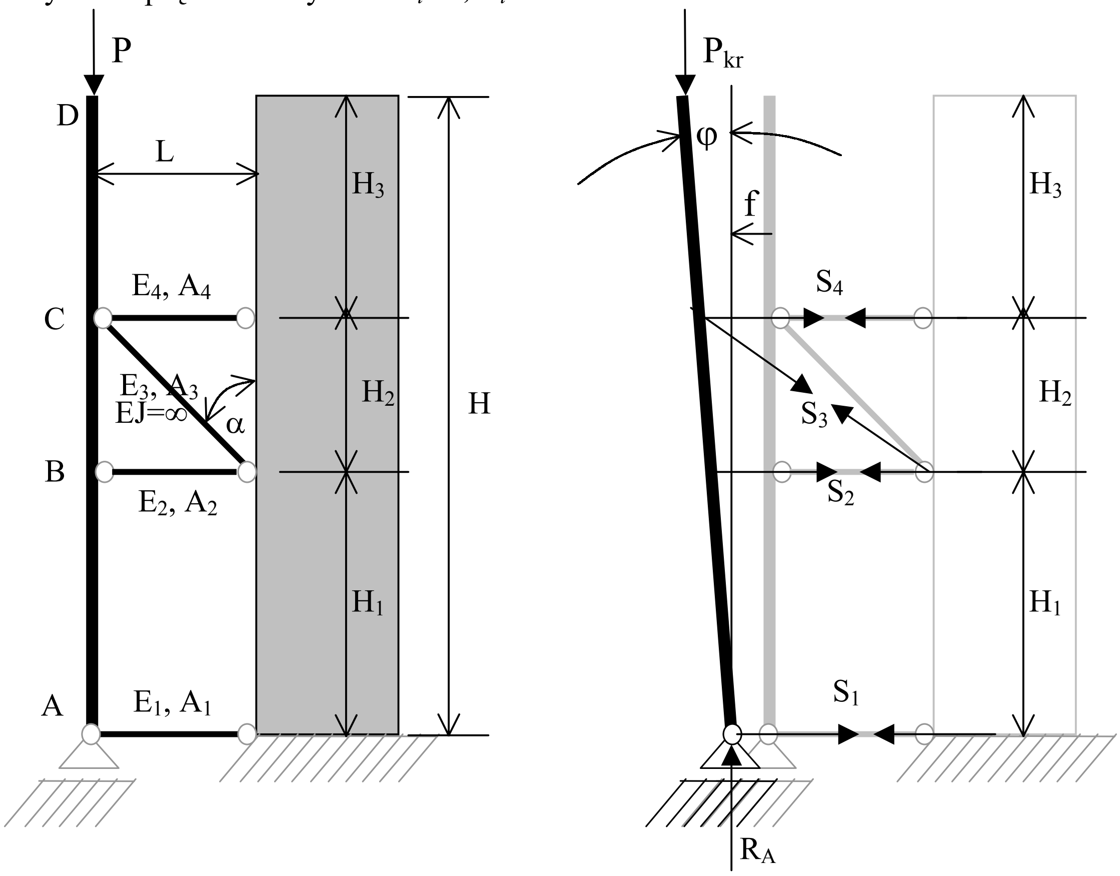
Przykład 9.4. Utrata stateczności sztywnego słupa podpartego sprężyście

Trzon windy do transportu materiałów budowlanych na kolejne piętra wznoszonej konstrukcji mocuje się do wznoszonej budowli stężeniem roboczym, aby zmniejszyć długość wyboczeniową jego smukłej konstrukcji. Aby zaprojektować pręty takiego stężenia roboczego można przyjąć, że ich praca statyczna jest taka jak praca prętów kratownicy. Podlegają one, mianowicie, jedynie ściskaniu lub rozciąganiu. Trzon windy jest nieporównanie sztywniejszy niż pręty stężające, może więc przemieszczać się jedynie jako belka nieskończenie sztywna. Wykluczamy zatem wyboczenie trzonu. Utrata stateczności może jednak nastąpić jeśli pręty stężenia okażą się zbyt podatne. Przyjmując schemat stężeń jak na rysunku 1.a. obliczyć siłę krytyczną uwarunkowaną ich sztywnością. W praktyce wymiary L oraz H_2 są dużo mniejsze niż H_1 i H_3 (te dwa ostatnie są zazwyczaj tego samego rzędu). Na rysunku, dla lepszej czytelności, wymiary te są nienaturalnie podobne. Aby wyprowadzenie równań rządzących równowagą odkształconego trzonu było czytelne, użyto w nim wymiarów podanych na rysunku. Jednak dla uproszczenia obliczenia wyznacznika układu równań proponuje się przyjąć $H_1= H_3=3h$, $H_2=h$, oraz materiał i pola przekrojów A_i wszystkich prętów identyczne: $E_i=E$, $A_i=A$.



Rysunek 1. Przyjęty schemat konstrukcji windy (rysunek po lewej). Deformacja konstrukcji zgodna z więzami i przyjętymi założeniami upraszczającymi (rysunek po prawej);

1. Równania równowagi odkształconej struktury

Rozpatrzmy jedynie belkę AD. Jej odkształcenie, biorąc pod uwagę nieskończoną sztywność, sprowadza się do ruchu płaskiego: złożenia translacji i obrotu. Wybierzmy punkt A jako biegun i przedstawmy ruch belki jako ruch bieguna (przemieszczenie poziome o wektor f) oraz obrót wokół bieguna o kąt φ. Przyjmijmy, że zarówno f jak i kąt φ są małe:

$$\frac{\sin\varphi}{\varphi}\cong 1 \qquad \cos\varphi\cong 1$$

Oznaczono (rys. 1.a.):

$$H_1+H_2+H_3=H; \qquad \alpha=\mathrm{arctg}(L/H)$$

Napiszemy sumę momentów względem punktu A oraz sumę rzutów na oś poziomą wszystkich sił działających na belkę wyobrażoną na Rys. 1.b.
Zapisanie trzeciego równania (sumy rzutów sił na oś pionową) wprowadza dodatkowo do procedury rozwiązania - reakcję w podporze niepodatnej.

$$\sum M_A=0 \Rightarrow \quad H_1S_2+(H_1+H_2)(S_3\sin\alpha+S_4)-(f+\varphi H)P_{kr}=0 \tag{1}$$

$$\sum F_x=0 \Rightarrow \quad S_1+S_2+S_3\sin\alpha+S_4=0 \tag{2}$$

Należy teraz skorzystać z warunków geometrycznych oraz prawa fizycznego wiążącego odkształcenia prętów z siłami, które w nich występują.
Wydłużenia prętów δ zgodne z założonym ruchem sztywnym belki są następujące (rozciąganie ze znakiem „+”):

$$\delta_1=f \quad \delta_2=f+\varphi H_1 \quad \delta_3=(f+\varphi(H_1+H_2))\sin\alpha \quad \delta_4=f+\varphi(H_1+H_2) \tag{3}$$

We wzorze (3_3) przemieszczenie poziome rzutowano na kierunek pręta, uzyskując w ten sposób przybliżoną wartość zmiany jego długości. Ścisłe uzasadnienie prawidłowości takiego przybliżenia przekracza ramy tego zadania i powinno być znane z kursu mechaniki technicznej. Podobnie uzasadnionym przybliżeniem jest nieuwzględnienie w równaniach (1), (2) i dalszych zmiany kąta α.
Wydłużenia δ_i występujące w (3) związane są z siłami w prętach (prawo Hooke’a):

$$\delta_1=S_1\frac{L}{E_1A_1} \quad \delta_2=S_2\frac{L}{E_2A_2} \quad \delta_3=S_3\frac{L}{E_3A_3\sin\alpha} \quad \delta_4=S_4\frac{L}{E_4A_4} \tag{4}$$

Porównując stronami (3_1) z (4_1), (3_2) z (4_2), (3_3) z (4_3), (3_4) z (4_4), obliczamy siły jako funkcje dwóch kinematycznych stopni swobody *f* i φ:

$$S_1=f\frac{E_1A_1}{L} \qquad S_2=(f+\varphi H_1)\frac{E_2A_2}{L}$$

$$S_3=(f+\varphi(H_1+H_2))\frac{E_3A_3\sin^2\alpha}{L} \qquad S_4=(f+\varphi(H_1+H_2))\frac{E_4A_4}{L} \tag{5}$$

2. Zapisanie układu równań dla obliczenia przemieszczeń *f* i φ

Siły zapisane równaniami od (5_1) do (5_2) podstawiamy do układu równań (1) i (2) otrzymując układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi (dotąd, dla lepszego zrozumienia tego, które wielkości występują w równaniach, używano symboli ogólnych zdefiniowanych na rysunku nr 1.
Dla uproszczenia dalszych obliczeń przyjmiemy teraz $H_1=H_3=3h$, $H_2=h$, $E_i=E$, $A_i=A$):

$$\left(9\frac{hEA}{L}+16hEA\left(\frac{\sin^3\alpha}{L}+\frac{1}{L}\right)-7P_{kr}\right)h\varphi+\left(3\frac{hEA}{L}+4hEA\left(\frac{\sin^3\alpha}{L}+\frac{1}{L}\right)-P_{kr}\right)f=0 \tag{6}$$

$$\left(7\frac{EA}{L}+4EA\frac{\sin^3\alpha}{L}\right)h\varphi+\left(3\frac{EA}{L}+EA\frac{\sin^3\alpha}{L}\right)f=0 \tag{7}$$

3. Zapisanie wyznacznika układu równań i obliczenie siły krytycznej

Jak łatwo zauważyć, układ równań dla obliczenia niewiadomych parametrów opisujących konfiguracje odkształconą jest jednorodny. Jego rozwiązanie trywialne: f=φ=0 interpretuje się jako ściskanie osiowe pręta AD. Niezerowe rozwiązanie możliwe jest tylko wtedy, gdy wyznacznik macierzy wyrazów przy niewiadomych w (8) przyjmuje wartość zero.

$$\begin{bmatrix} \left(9\frac{h^2EA}{L}+16h^2EA\left(\frac{\sin^3\alpha}{L}+\frac{1}{L}\right)-7P_{kr}\right) & \left(3\frac{hEA}{L}+4hEA\left(\frac{\sin^3\alpha}{L}+\frac{1}{L}\right)-P_{kr}\right) \\ \left(7\frac{hEA}{L}+4hEA\frac{\sin^3\alpha}{L}\right) & \left(3\frac{EA}{L}+EA\frac{\sin^3\alpha}{L}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi \\ f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{8}$$

Wyznacznik ten zależy od parametru P_{kr} i wynosi:

$$D=\frac{hEA}{L}\left(hEA\left(26+17\sin^3\alpha\right)-P_{kr}L\left(14+3\sin^3\alpha\right)\right) \tag{9}$$

Z warunku $D=0$ można łatwo wyznaczyć siłę krytyczną utrzymującą belkę w konfiguracji geometrycznej opisanej niezerowymi (choć nie dającymi się jednoznacznie obliczyć) parametrami f i φ:

$$P_{kr}=\frac{hEA\left(26+17\sin^3\alpha\right)}{L\left(14+3\sin^3\alpha\right)} \tag{10}$$

Można zauważyć, że siła ta jest proporcjonalna do sztywności prętów stężenia EA, odwrotnie proporcjonalna do ich długości L.

4. Sprawdzenie

Łatwo zauważyć, że podstawiając siłę krytyczną wyrażoną wzorem (10) do któregokolwiek z równań (6), (7) i przyjmując f jako dane, otrzyma się w obu przypadkach identyczna wartość φ, podaną poniżej. Może to być sprawdzeniem poprawności obliczeń. Proponuje się sprawdzić samodzielnie, że przyjmując φ =1 otrzyma się również z obu równań te samą wartość translacji (będzie ona również ujemna).

$$\varphi=-\frac{f}{h}\frac{3+\sin^3\alpha}{7+4\sin^3\alpha} \tag{11}$$