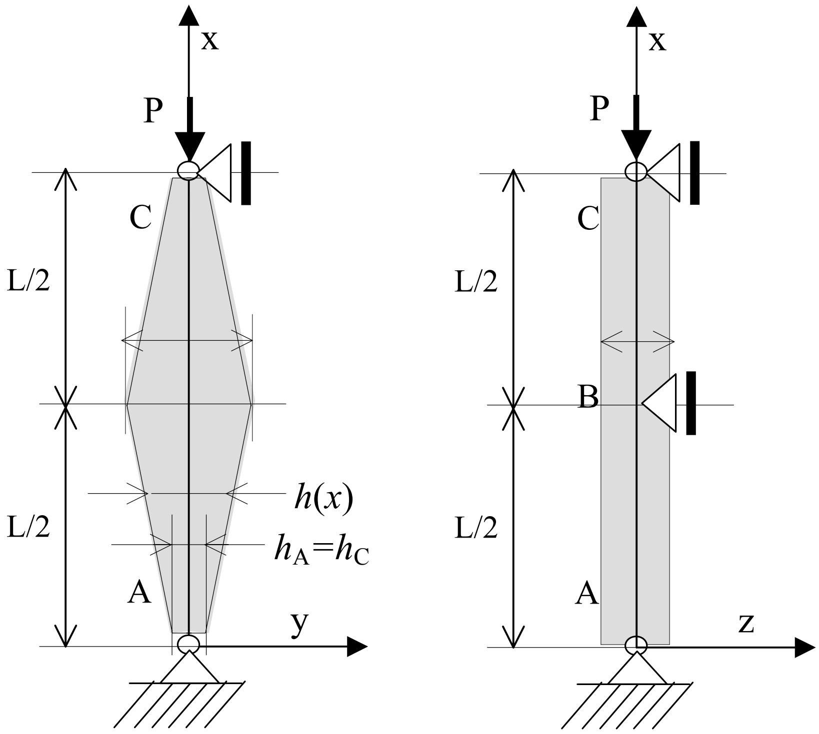
Przykład 9.5. Obliczenie siły krytycznej metodą energetyczną

Wyznaczyć przybliżoną wartość krytyczną siły P obciążającej osiowo słup o liniowo zmiennym przekroju poprzecznym. Słup jest podparty przegubowo na obu końcach jednak w płaszczyźnie *xz* dodatkowa podpora w połowie wysokości blokuje możliwość przesuwu w kierunku *z* (różne schematy statyczne w dwu różnych płaszczyznach często występują w praktyce). Dana jest wysokość *L* słupa, jego szerokość w środku wysokości h_0 oraz stała grubość *b*. Szkic słupa z przyjętym układem współrzędnych przedstawiony jest na rysunku 1. Moduł Younga jest stały i równy *E*. Można przyjąć w oszacowaniu końcowym siły krytycznej, że $b=h_0$



Rys. 1. Pręt o liniowo zmiennej szerokości przekroju.

Rozwiązanie zadania 5.

Zauważmy przede wszystkim, że zmienny przekrój spowoduje zmienny moment bezwładności, który pojawia się w równaniu różniczkowym osi ugiętej pręta. Zależność momentu bezwładności od współrzędnej *x* zostanie ustalona poniżej. Każdy przekrój poprzeczny jest prostokątem o bokach *b* oraz $h(x)$. Wobec tego:

$$J_y = \frac{h(x)b^3}{12} \qquad J_z = \frac{h^3(x)b}{12} \tag{1}$$

Wysokość przekroju jest funkcją przedziałami liniową zmiennej *x*:

$$h(x) = \begin{cases} h_A + \dfrac{2(h_0 - h_A)h_0 x}{L} & dla\ x < L/2 \\ -h_A + 2h_0 - \dfrac{2(h_0 - h_A)x}{L} & dla\ x > L/2 \end{cases} \tag{2}$$

Zmienność momentów bezwładności zapisać można wzorami:

$$J_z(x)=\begin{cases} \frac{b}{12}\left(h_A+\frac{2(h_0-h_A)h_0 x}{L}\right)^3 & dla\ x<L/2 \\ \frac{b}{12}\left(h-h_A+2h_0-\frac{2(h_0-h_A)x}{L}\right)^3 & dla\ x>L/2 \end{cases} \tag{3$_1$}$$

$$J_y(x)=\begin{cases} \frac{b^3}{12}\left(h_A+\frac{2(h_0-h_A)h_0 x}{L}\right) & dla\ x<L/2 \\ \frac{b^3}{12}\left(-h_A+2h_0-\frac{2(h_0-h_A)x}{L}\right) & dla\ x>L/2 \end{cases} \tag{3$_2$}$$

Dla pręta o zmiennym przekroju, znalezienie siły krytycznej z warunku istnienia niezerowego rozwiązania równania różniczkowego osi ugiętej słupa może się okazać skomplikowane. Równanie różniczkowe osi ugiętej zapisuje się w obu przedziałach zmienności przekroju następująco (dla przykładu zapisano jedynie równanie dla ugięcia w płaszczyźnie *xy*):

$$\begin{cases} E\frac{b}{12}\left(h_A+\frac{2(h_0-h_A)h_0 x}{L}\right)^3 x^3 y''(x)+P_{kr}^{xy}y(x)=0 & dla\ x<L/2 \\ \frac{b}{12}\left(-h_A+2h_0-\frac{2(h_0-h_A)x}{L}\right)^3 y''(x)+P_{kr}^{xy}y(x)=0 & dla\ x>L/2 \end{cases} \tag{4}$$

Rozwiązanie równania (4), (nawet dla liniowo zmiennego przekroju) jest trudne. Aby ominąć tę trudność zastosujemy metodę energetyczną. Zgodnie z tą metodą najlepszym przybliżeniem siły krytycznej będzie:

$$P_{kr}=\min_{v\in V}\frac{\int_0^L EJ(x)(v''(x))^2dx}{\int_0^L (v'(x))^2dx} \tag{5}$$

We wzorze (5) $v(x)$ należy do pewnej rodziny funkcji kinematycznie dopuszczalnych V, to znaczy takich, które spełniają warunki zamocowania i są ciągłe. Aby wzór (5) mógł być zastosowany funkcja $v(x)$ powinna być dwukrotnie różniczkowalna i obie te pochodne musza być całkowalne w kwadracie. Minimum osiąga się dla funkcji $v(x)=y(x)$, która jest rozwiązaniem zagadnienia wyboczenia. Nie zawsze jednak uda się tak zdefiniować rodzinę funkcji próbnych V, aby rozwiązanie (nieznane!) do niej należało. Należy się starać, aby był to zbiór funkcji spełniający możliwie dużo znanych warunków. W rozwiązaniu tego zadania przyjmiemy taką funkcję, która jest kinematycznie i dodatkowo spełnia statyczne warunki brzegowe:

$$M_z(0)=0,\ M_z(L)=0 \tag{6}$$

$$M_y(0)=0,\ M_y(L)=0 \tag{7}$$

(momenty w przegubach podporowych są równe zeru, indeksy $_y$ i $_z$ oznaczają odpowiednio rzuty wektora momentu na oś *y* i *z*).

Kinematyczne warunki wymienione sa poniżej (zerowanie się ugięć na podporach):

$$y(0)=0,\ y(L)=0 \tag{8}$$

$$z(0)=0,\ z(L/2)=0,\ z(L)=0 \tag{9}$$

Funkcja $y(x)$ taka, że jej druga pochodna przyjmuje wartości zerowe na podporach może być znaleziona w następujący sposób (ograniczając się do wielomianów w wyborze postaci funkcji):

$y''(x)=ax(L-x)$ jest proporcjonalna do momentu (*a* jest współczynnikiem proporcjonalności) i zeruje się w przegubach belki.

Dwukrotnie całkując otrzymujemy:

$$y(x)=a\left(-\frac{x^4}{12}+\frac{x^3L}{6}+Ax+B\right) \tag{10}$$

A oraz B wyznaczymy z warunków (8) otrzymując wynik (11):

$y(0)=0$ ⌣ B=0

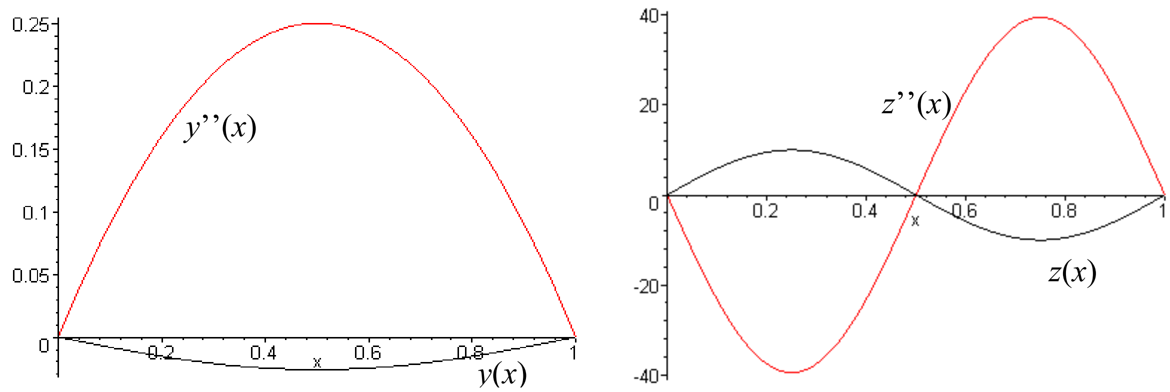
$y(L)=0$ ⌣ $-\frac{L^4}{12}+\frac{L^4}{6}+Ax=0$ ⌣ A=L^3/12.

$$y(x)=a\left(-\frac{x^4}{12}+\frac{x^3L}{6}-\frac{L^3x}{12}\right) \tag{11}$$

$$y'(x)=a\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2L}{2}-\frac{L^3}{12}\right) \qquad y''(x)=ax(L-x) \tag{12}$$

Funkcja $z(x)$ taka, że jej druga pochodna przyjmuje wartości zerowe w przegubach zaś sama funkcja – wartości zerowe na trzech podporach może być trudna do znalezienia wśród wielomianów, łatwo natomiast wskazać przykład takiej funkcji wśród funkcji trygonometrycznych:

$$z(x)=b\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \qquad z'(x)=b\frac{2\pi}{L}\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \qquad z''(x)=-b\frac{4\pi^2}{L^2}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \tag{13}$$



Rysunek 2. Wykresy przybliżonych linii ugięcia słupa podczas wyboczenia oraz ich drugich pochodnych. Są one zdefiniowane wzorami (11), (12_2) oraz (13_1) i (13_3)

Ponieważ przyjęte funkcje przybliżające linię ugięcia są całkowicie zdefiniowane (mnożnik *a* występuje zarówno w liczniku jak i w mianowniku i ulega redukcji), wzór (5) sprowadza się do postaci (14_1) i (14_2):

$$P_{kr}^{xz}=\frac{\int_0^L EJ_y(x)(z''(x))^2dx}{\int_0^L (z'(x))^2dx} \qquad P_{kr}^{xy}=\frac{\int_0^L EJ_z(x)(y''(x))^2dx}{\int_0^L (y'(x))^2dx} \tag{14}$$

Należy teraz wstawić do wzoru (14_2) wyrażenia (3) oraz pochodne funkcji (13). Siłę krytyczną w płaszczyźnie xy otrzymuje się po krótkich i elementarnych obliczeniach:

$$P_{kr}^{yx}\cong Eb/12\,\frac{\int\limits_0^{L/2} x^2(L-x)^2\left(h_A+\frac{2(h_0-h_A)h_0x}{L}\right)^3dx+\int\limits_{L/2}^{L} x^2(L-x)^2\left(-h_A+2h_0-\frac{2(h_0-h_A)x}{L}\right)^3dx}{\int\limits_0^L\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2L}{2}-\frac{L^3}{12}\right)^2dx}$$

$$P_{kr}^{yx}\cong\frac{1}{544}E\frac{b\left(185h_0^3+35h_A^3+87h_0h_A^2+141h_0^2h_A\right)}{L^2} \tag{15}$$

Pozostaje wstawić do wzoru (14_1) wyrażenia (3) oraz pochodne funkcji (10). W płaszczyźnie xz otrzymuje się po elementarnych rachunkach:

$$P_{kr}^{zx} \cong Eb^3/12\,\frac{2\pi}{L}\,\frac{\int\limits_0^{L/2}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\left(h_A+\frac{2(h_0-h_A)h_0 x}{L}\right)dx+\int\limits_{L/2}^{L}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\left(-h_A+2h_0-\frac{2(h_0-h_A)x}{L}\right)dx}{-\int\limits_0^{L}\cos\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 dx}$$

$$P_{kr}^{zx} \cong \frac{\pi^2}{6}E\frac{b^3(h_0+h_A)}{L^2} \tag{16}$$

Jeśli przyjąć $b=h_0$ zaś $h_A=h_0/3$ to:

$$P_{kr}=\min\left(P_{kr}^{yx},P_{kr}^{zx}\right)=\min\left(2.1932E\frac{h_0^4}{L^2},\,0.4466E\frac{h_0^4}{L^2}\right)=0.4466E\frac{h_0^4}{L^2}$$

Ćwiczenie samodzielne

sprawdzić, że dla przyjętej również w formie trygonometrycznej funkcji *y(x)*: *y(x)=sin(πx/L)* otrzyma się:

$$P_{kr}^{yx} \cong 0.459E\frac{bh_0^3}{L^2}$$

Jest to więc gorsze przybliżenie siły krytycznej niż otrzymane poprzednio gdyż jest od niej większa (zobacz – wzór (5))!