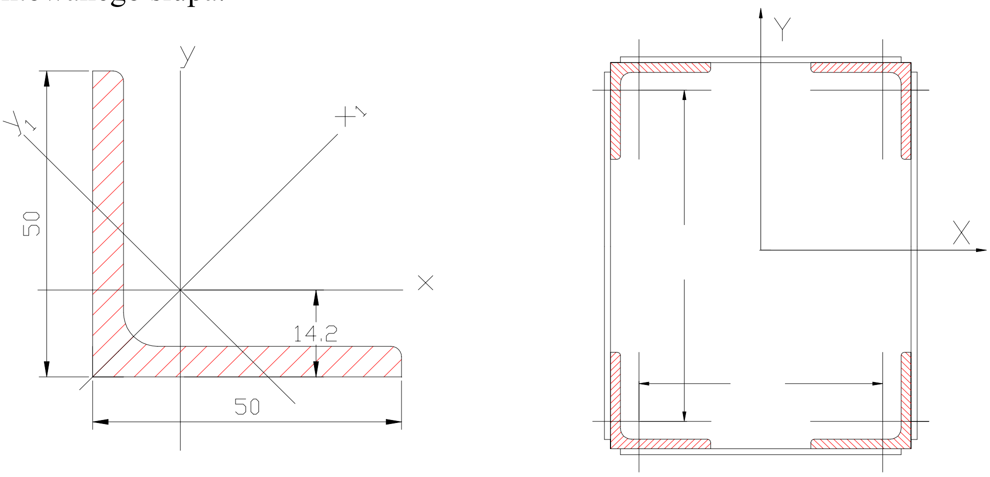
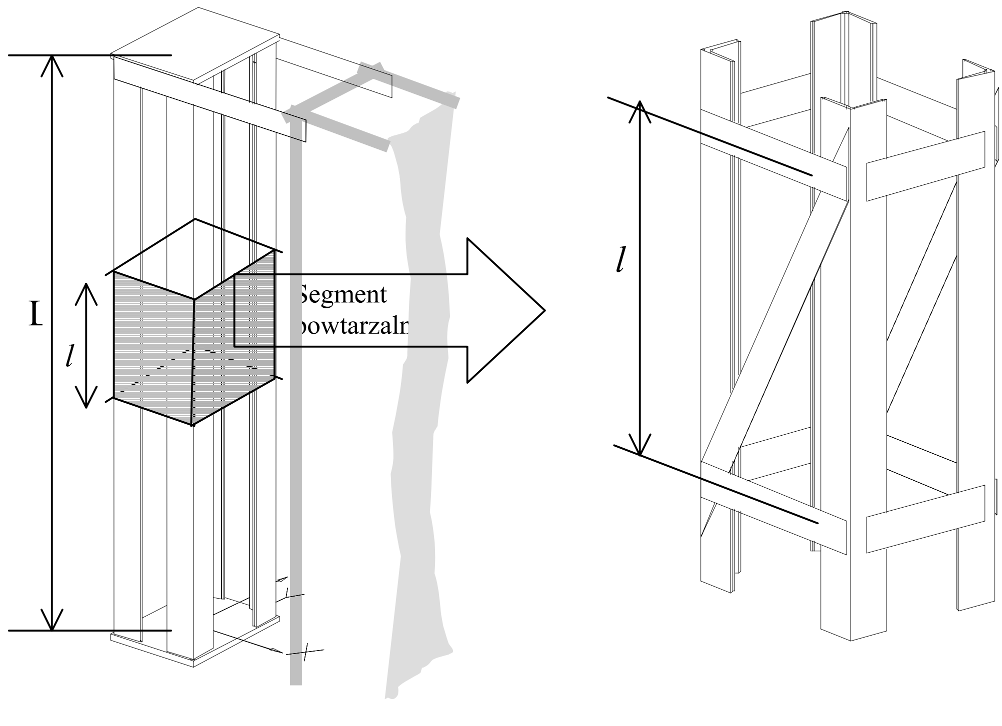
Przykład 9.6. Siła krytyczna dla stalowego słupa czterogałęziowego

Zaprojektować racjonalnie z uwagi na wyboczenie słup czterogałęziowy, skratowany. Słup ma być wykonany z kątowników stalowych przedstawionych na rysunku 1.a. Układ przestrzenny kątowników pokazany jest na przekroju słupa (rys. 1.b). Kątowniki połączone są blachą głowicową oraz przyspawane są do płyty fundamentowej. Głowica słupa umocowana jest do sztywnej konstrukcji przy pomocy płaskowników. Ilustruje to schematycznie rys. 2.a. Schemat skratowania przedstawia rysunek 2.b. Zmiennymi projektowania są wymiary *a, b* oraz *l*. Przyjąć dopuszczalne naprężenie krytyczne jako naprężenie proporcjonalne σ_H=200 MPa, E=$2*10^5$ MPa. Wysokość słupa jest zadana, *L*=5m. Obliczyć siłę krytyczną dla zaprojektowanego słupa.

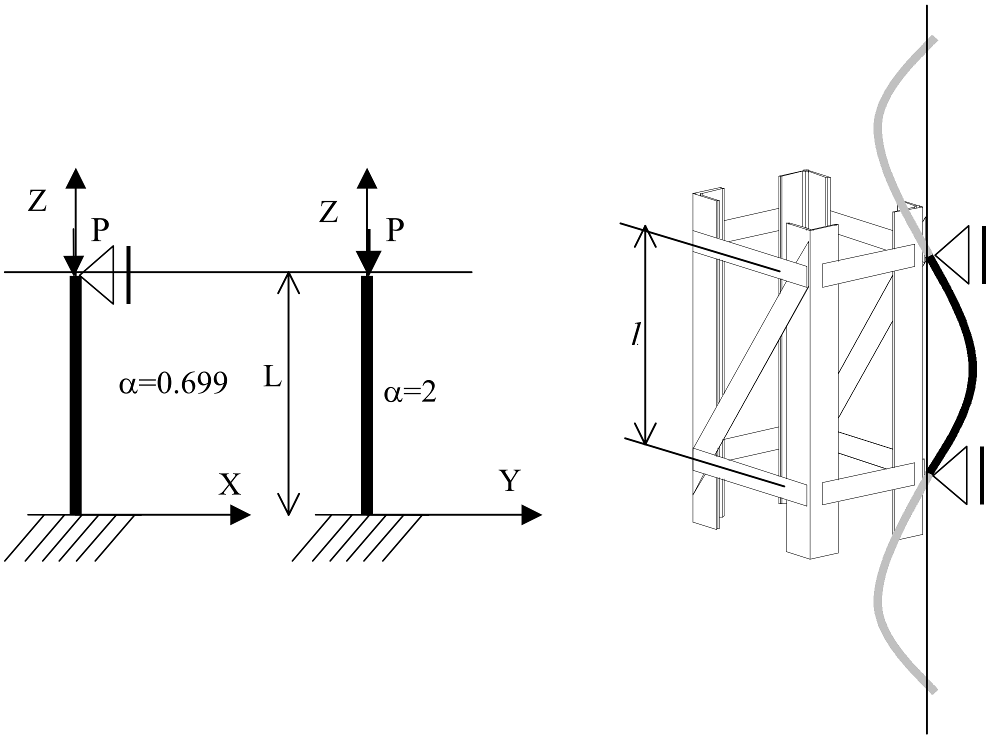


Rysunek 1. Kątownik z jakiego wykonana jest pojedyncza gałąź słupa oraz przekrój poprzeczny słupa



Rysunek 2. Schemat zamocowania słupa oraz szkic powtarzalnego segmentu skratowania.

Schematy statyczne słupa odpowiadające rysunkowi 2a wyobrażone są na rysunku 3.a. Schemat statyczny pojedynczej gałęzi słupa przedstawia rysunek 3.b. Schemat statyczny pojedynczej gałęzi uzasadnia się w następujacy sposób: każde skratowanie traktowane jest jako podpora gałęzi słupa, periodycznie powtórzony schemat belki Eulera realizuje warunki brzegowe takie same jak dla jednego przęsła takiej belki. Schemat taki jest bliski rzeczywistości fizycznej gdy krzyżulce łączone są z gałęziami słupa w sposób przegubowy (raczej nity lub śruby niż spawanie). Z punktu widzenia bezpieczeństwa takie przybliżenie jest zawsze korzystniejsze.



Rysunek 3. Przyjęte schematy słupa oraz jego pojedynczej gałęzi.

Wymóg racjonalności interpretować można jako postulat jednakowej smukłości zarówno każdej gałęzi słupa jak i całego słupa w wyróżnionych płaszczyznach.
Warunki zadania pozwalają ustalić tę graniczną smukłość:

Ponieważ $\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_H$ to $\lambda_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_H}}$ $\quad \lambda_{gr} = \pi \sqrt{\frac{2*10^5}{200}} = 99.3 \approx 100$

Posługując się wzorem na smukłość pręta można ustalić długość swobodną l gałęzi pomiędzy krzyżulcami:

$$\lambda = l_w \sqrt{\frac{A}{J}} \qquad l = \frac{1}{\alpha} \lambda \sqrt{\frac{J}{A}}$$

l_w jest długością wyboczeniową, α jest współczynnikiem zależnym od warunków zamocowania, J odpowiednim momentem bezwładności zaś A jest polem przekroju.
Dla pojedynczej gałęzi odczytujemy potrzebne dane z tablic:

$$J_x = 11.2 \text{ cm}^4;\ J_{x1} = 17.8 \text{ cm}^4;\ J_{y1} = 4.61 \text{ cm}^4;\ A = 4.89 \text{cm}^2$$

Zgodnie z warunkami zadania dla pojedynczej gałęzi α=1, $J=J_{y1}$=4.61cm^4, A=4.89cm^2
Otrzymuje się:

$$l=100\sqrt{\frac{4.61}{4.89}}=97\text{ cm}$$

Dla gałęzi pierwszej i ostatniej można przyjąć schemat warunków brzegowych utwierdzenie-podpora ze względu na utwierdzenie w blachach głowicy i podstawy.
Wobec tego α=0.699 i w konsekwencji te dwie skrajne długości wynoszą:

$$l=\frac{1}{0.699}100\sqrt{\frac{4.61}{4.89}}=139\text{ cm}$$

Rozkładając krzyżulce proporcjonalnie wg schematu:

$$2\times\frac{1}{0.699}\lambda\sqrt{\frac{4.61}{4.89}}+3\times\lambda\sqrt{\frac{4.61}{4.89}}=5m$$

otrzyma się nieco mniejszą smukłość λ oraz następujący schemat rozstawów skratowań:

$$\lambda=87.9,\ l_1=1.22\text{ m},\ l_2=0.85\text{ m}$$
$$1.22\text{ m}+3*0.85\text{ m}+1.22\text{ m} = 5\text{m}$$

Z warunku aby cały słup miał podobną smukłość obliczymy potrzebne J_x oraz J_y. Dane liczbowe dla całego słupa są następujące:

$$l=\text{L}=500\text{ cm, A}=4*4.89\text{cm}^2=19.56\text{ cm}^2$$

współczynniki długości wyboczeniowej podano na rysunku 3 dla obu płaszczyzn.

$$J=A\frac{l^2\alpha^2}{\lambda^2}\qquad J_x=19.56\frac{(2*500)^2}{87.9^2}=2534\text{ cm}^4\quad J_y=19.56\frac{(0.699*500)^2}{87.9^2}=309.5\text{ cm}^4$$

Ponieważ $J_X=4*\left(J_x+A\left(\frac{b}{2}\right)^2\right)$ (wzór Steinera), potrzebne rozsunięcie kątowników wynosi:

$$b=\sqrt{(J_X-4J_x)/A}=\sqrt{(2534-4*11.2)/4.89}=22.6\text{ cm}$$

Podobnie $a=\sqrt{(J_Y-4J_y)/A}=\sqrt{(309.5-4*11.2)/4.89}=7.37$ cm

W kierunku równoległym do osi X gałęzie praktycznie nie musza być rozsunięte. Mogą one być zespawane spoiną przerywaną wzdłuż wysokości słupa. Skratowanie w płaszczyźnie ZY nie jest potrzebne. Należy przyjąć a (patrz –rys.1):

$$a=100\text{mm}-2*14.2\text{mm}=71.6\text{ mm}=7.16\text{ cm}$$

Otrzymane J_Y: $J_Y=4*\left(11.2+4.89\left(\frac{7.16}{2}\right)^2\right)=295.5$

Rzeczywista smukłość: $\lambda=0.699*500\sqrt{\frac{4*4.89}{295.5}}=89.9$

.

Niewielki (22 cm) rozstaw gałęzi w kierunku równoległym do osi Y daje następująca smukłość słupa.

$$b=22\text{ cm}$$

$$\text{Otrzymane } J_X\text{:}\quad J_X = 4*\left(11.2+4.89\left(\frac{22}{2}\right)^2\right) = 2411.6$$

$$\text{Rzeczywista smukłość:}\quad \lambda = 2*500\sqrt{\frac{4*4.89}{2411.6}} = 90.0$$

Można obecnie obliczyć siłę krytyczną dla słupa. Obliczymy ją dla rzeczywistej wartości gałęzi i słupa w obu płaszczyznach. Posłużymy się wzorem:

$$P_{kr} = A\sigma_{kr}$$

Naprężenie krytyczne wyznaczymy jako funkcję aktualnej smukłości elementów ściskanych. Ponieważ (jak wynika z przedstawionego, uproszczonego procesu projektowania) smukłość rzeczywista jest dla wszystkich elementów mniejsza od smukłości granicznej, nie można do tego celu użyć wzoru Eulera. Posłużymy się więc przybliżonym przebiegiem funkcji

$$\sigma_{kr} = f(\lambda) \qquad \lambda < \lambda_{gr}$$

zwanej przybliżeniem Johnsona-Ostenfelda. Empiryczne współczynniki A oraz B dla zależności kwadratowej

$$\sigma_{kr} = A - B\lambda^2 \qquad \lambda < \lambda_{gr}$$

odczytamy z tablic zamieszczonych w podręczniku (Jakubowicz, Orłoś, Wytrzymałość Materiałów, str. 338). Wynoszą one:

A=464, B=0.026

Obliczenie siły krytycznej dla pojedynczej gałęzi:
$\lambda=87.9 < \lambda_{gr}=99.3$

$$\sigma_{kr} = 464 - 0.026*87.9^2 = 263.1 \text{ MPa}$$

Naprężenie to jest nieco mniejsze niż obliczone z wzoru Eulera (268.3 MPa).

Siła krytyczna dla czterech gałęzi wynosi więc:

$$4*263.1*4.89\text{cm}^2 = 517 \text{ kN}$$

Obliczenie siły krytycznej dla słupa w płaszczyźnie ZY:

$\lambda=89.9 < \lambda_{gr}=99.3$

$$\sigma_{kr} = 464 - 0.026*89.9^2 = 253.9 \text{ MPa}$$

Siła krytyczna dla całego słupa wynosi więc:

$$253.9*(4*4.89\text{cm}^2) = 497 \text{ kN} < 515 \text{ kN}$$

Siła krytyczna dla zaprojektowanego słupa wynosi wiec 497 kN.