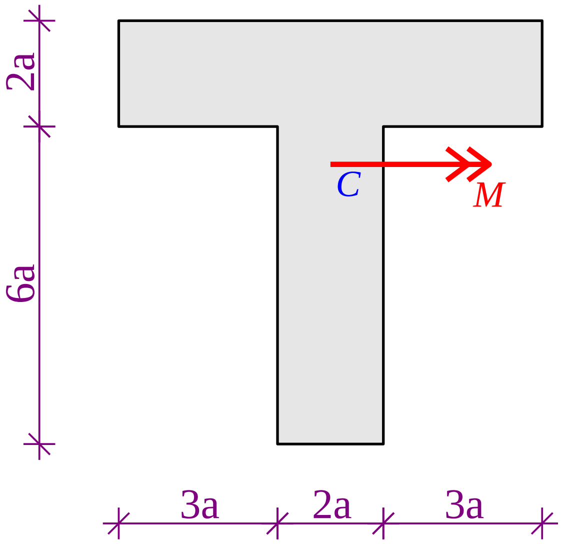
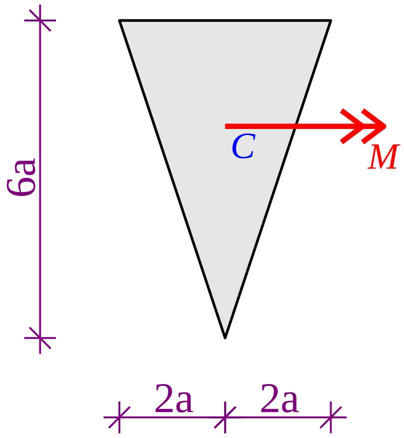
## Przykład 10.1. Obliczenie momentu plastycznego przy zginaniu

Obliczyć momenty plastyczne przy zginaniu dla następujących przekrojów i wartości granicy plastyczności:

a) $\sigma_{pl}^{c} = 2\sigma_{pl}^{r} = 2\sigma_{pl}$

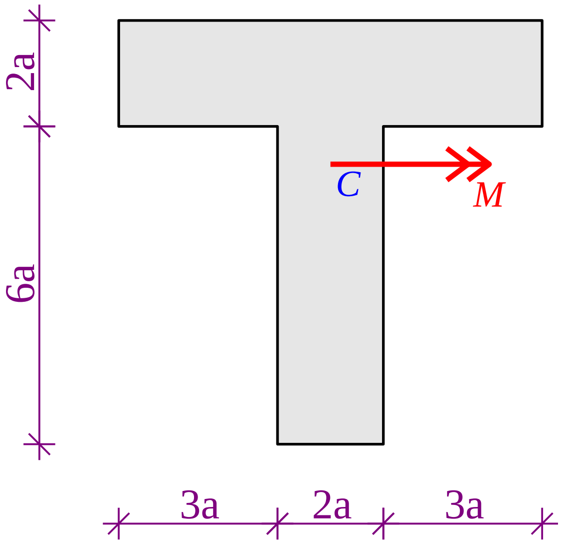



b) $\sigma_{pl}^{c} = \sigma_{pl}^{r} = \sigma_{pl}$

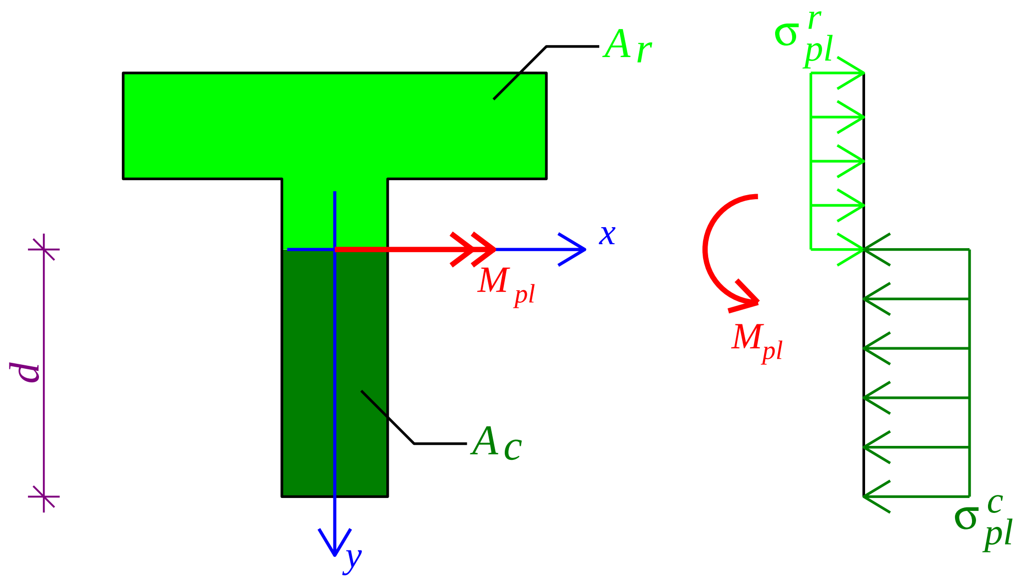


**Rozwiązanie**

a) $\sigma^c_{pl} = 2\sigma^r_{pl} = 2\sigma_{pl}$




Rozwiązywanie zadania zacząć należy od określenia położenia osi obojętnej w stanie pełnego uplastycznienia przekroju. Szukane położenie osi można znaleźć z równania równowagi sił normalnych w przekroju. W dalszych obliczeniach założono, że szukana oś obojętna przechodzi przez środnik przekroju.




$$\sigma^r_{pl} A_r = \sigma^c_{pl} A_c \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma_{pl} A_r = 2\sigma_{pl} A_c \qquad \Longrightarrow \qquad A_r = 2A_c$$

gdzie

| | | |
|---|---|---|
| $A_r$ | – | pole rozciąganej części przekroju |
| $A_c$ | – | pole ściskanej części przekroju |

Ponieważ

$$A_r + A_c = A$$

gdzie

$$A = 2a \cdot 8a + 6a \cdot 2a = 28a^2 \qquad - \qquad \text{pole przekroju poprzecznego}$$

to

$$2A_c + A_c = A \qquad \Longrightarrow \qquad A_c = \frac{1}{3}A \qquad \Longrightarrow \qquad A_c = \frac{28}{3}a^2$$

Stąd

$$A_c = 2a \cdot d = \frac{28}{3}a^2 \qquad \Longrightarrow \qquad d = \frac{14}{3}a$$

Ponieważ $d = \frac{14}{3}a \ < \ 6a$, więc założenie dotyczące położenia osi obojętnej jest poprawne. Równanie sumy momentów zginających w przekroju pozwala obliczyć szukaną wartość momentu plastycznego.

$$M_{pl} - \sigma_{pl}^r \left|S_x^r\right| + \sigma_{pl}^c \left|S_x^c\right| = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad M_{pl} = \sigma_{pl}\left(\left|S_x^r\right| + 2\left|S_x^c\right|\right)$$

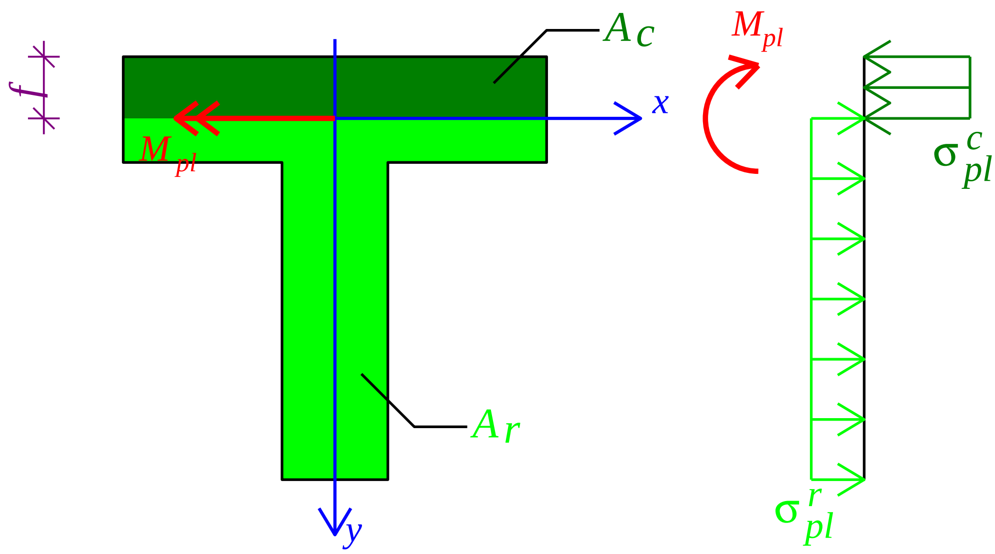
$S_x^r$ i $S_x^c$ oznaczają odpowiednio moment statyczny rozciąganej i ściskanej części przekroju.

$$\begin{aligned}
S_x^r &= 2a \cdot 8a \cdot \left(\frac{14}{3}a - 6a - a\right) + 2a \cdot \left(6a - \frac{14}{3}a\right) \cdot \frac{\frac{14}{3}a - 6a}{2} = \\
&= 16a^2 \cdot \left(-\frac{7}{3}a\right) + \frac{4}{3}a^2 \cdot \left(-\frac{4}{3}a\right) = -\frac{112}{3}a^3 - \frac{16}{9}a^3 = -\frac{336 + 16}{9}a^3 = -\frac{352}{9}a^3 \\
S_x^c &= 2a \cdot \frac{14}{3}a \cdot \frac{\frac{14}{3}a}{2} = \frac{196}{9}a^3
\end{aligned}$$

Tak więc

$$M_{pl} = \sigma_{pl}\left(\frac{352}{9}a^3 + 2 \cdot \frac{196}{9}a^3\right) = \frac{248}{3}a^3\sigma_{pl} \approx 82{,}667a^3 \cdot \sigma_{pl}$$

Z uwagi na nierówność wartości granicy plastyczności przy ściskaniu i rozciąganiu ($\sigma_{pl}^c \ \neq \ \sigma_{pl}^r$), a także z powodu niesymetryczności przekroju względem osi obojętnej przekroju w stanie pełnego uplastycznienia, moment plastyczny przy zmienionym znaku będzie miał inną wartość. Ten przypadek przedstawiony został na rysunku na następnej stronie. Tym razem założono, że oś obojętna przechodzi przez półkę przekroju.




Wartości $A_c$ i $A_r$ oczywiście nie zmieniają się, czyli

$$A_c = 8a \cdot f = \frac{28}{3}a^2 \qquad \Longrightarrow \qquad f = \frac{7}{6}a$$

Ponieważ $f = \frac{7}{6}a < 2a$ więc założenie dotyczące położenia osi obojętnej w stanie pełnego uplastycznienia było poprawne.
Stąd

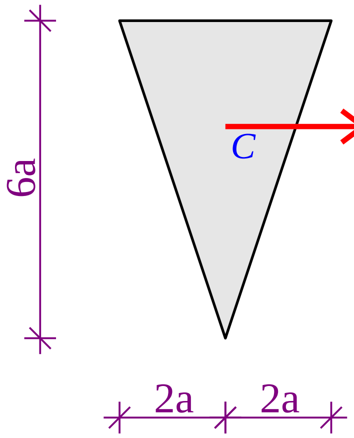
$$S_x^r = 2a \cdot 6a \cdot \left(2a - \frac{7}{6}a + \frac{1}{2} \cdot 6a\right) + \left(2a - \frac{7}{6}a\right) \cdot 8a \cdot \frac{2a - \frac{7}{6}a}{2} =$$
$$= 12a^2 \cdot \frac{23}{6}a + \frac{20}{3}a^2 \cdot \frac{5}{12}a = 46a^3 + \frac{25}{9}a^3 = \frac{414 + 25}{9}a^3 = \frac{439}{9}a^3$$
$$S_x^c = 8a \cdot \frac{7}{6}a \cdot \frac{-\frac{7}{6}a}{2} = -\frac{49}{9}a^3$$

Tak więc

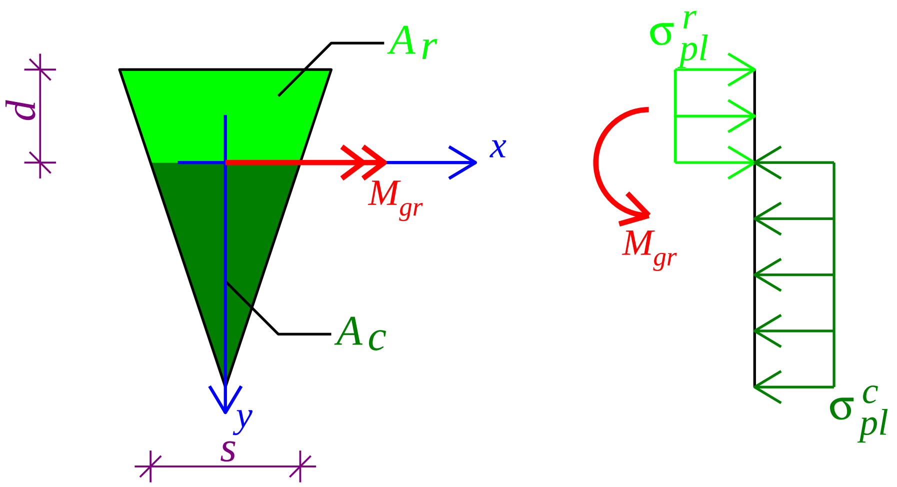
$$M_{pl} = \sigma_{pl}\left(\frac{439}{9}a^3 + 2 \cdot \frac{49}{9}a^3\right) = \frac{537}{9}a^3\sigma_{pl} = \frac{179}{3}a^3\sigma_{pl} \approx 59{,}667a^3 \cdot \sigma_{pl}$$

Podsumowując można stwierdzić, że jeżeli moment zginający ma taki zwrot, że rozciągane są włókna górne przekroju, to uplastycznienie całego przekroju poprzecznego nastąpi przy wartości $M_{pl} \approx 82{,}667a^3 \cdot \sigma_{pl}$, jeśli zaś moment zginający ma znak przeciwny, tj. rozciągane są włókna dolne, to uplastycznienie całego przekroju poprzecznego nastąpi przy wartości $M_{pl} \approx 59{,}667a^3 \cdot \sigma_{pl}$.

b) $\sigma_{pl}^{c} = \sigma_{pl}^{r} = \sigma_{pl}$




W tym przypadku ze względu na równość dopuszczalnych naprężeń ściskających i rozciągających położenie osi obojętnej określone jest równaniami




$$\begin{cases} A_c = A_r = \dfrac{A}{2} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot 4a\cdot 6a}{2} = \dfrac{12}{2}a^2 = 6a^2 \\ A_r = \dfrac{1}{2}\cdot 4a \cdot \left(1 - \dfrac{d}{6a}\right)\cdot(6a-d) = \dfrac{(6a-d)^2}{3} \end{cases} \implies (6a-d)^2 = 18a^2 \implies$$

$$\implies d^2 - 12ad + 18a^2 = 0$$

Stąd wartość $d$ wynosi

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{144a^2 - 4\cdot 18a^2} = \sqrt{144a^2 - 72a^2} = \sqrt{72}a = 6\sqrt{2}a$$

$$d = \frac{12a - 6\sqrt{2}a}{2} = 3\left(2-\sqrt{2}\right)a \approx 1{,}757a$$

Wymiar $s$ jest natomiast równy

$$s = \frac{2}{3}(6a-d) = \frac{2}{3}\left[6a - 3\left(2-\sqrt{2}\right)a\right] = 2\sqrt{2}a \approx 2{,}828a$$

Momenty statyczne rozciąganej i ściskanej części przekroju wynoszą odpowiednio:

$$
\begin{aligned}
S_x^r &= 2\sqrt{2}a \cdot 3\left(2-\sqrt{2}\right)a \cdot \left[-\frac{3}{2}\left(2-\sqrt{2}\right)a\right] + \\
&\quad + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4a-2\sqrt{2}a}{2} \cdot 3\left(2-\sqrt{2}\right)a \cdot \left[-\frac{2}{3} \cdot 3\left(2-\sqrt{2}\right)a\right] = \\
&= -9\sqrt{2}\left(2-\sqrt{2}\right)^2 a^3 - 6\left(2-\sqrt{2}\right)^3 a^3 = \\
&= -\left(2-\sqrt{2}\right)^2\left(9\sqrt{2}+12-6\sqrt{2}\right)a^3 = -\left(2-\sqrt{2}\right)^2\left(12+3\sqrt{2}\right)a^3 = \\
&= -\left(4-4\sqrt{2}+2\right)\left(12+3\sqrt{2}\right)a^3 = -\left(72+18\sqrt{2}-48\sqrt{2}-24\right)a^3 = \\
&= -\left(48-30\sqrt{2}\right)a^3 = -6\left(8-5\sqrt{2}\right)a^3 \approx -5{,}574a^3 \\
S_x^c &= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2}a \cdot 3\sqrt{2}a \cdot \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{2}a = 6\sqrt{2}a^3 \approx 8{,}485a^3
\end{aligned}
$$

Wyznaczenie wartości momentów statycznych pozwala nam policzyć moment plastyczny.

$$
\begin{aligned}
M_{pl} &= \left(|S_x^r| + |S_x^c|\right)\sigma_{pl} = \left[6\left(8-5\sqrt{2}\right)a^3 + 6\sqrt{2}a^3\right]\sigma_{pl} = \left(48-24\sqrt{2}\right)a^3\sigma_{pl} = \\
&= 24\left(2-\sqrt{2}\right)a^3\sigma_{pl} \approx 14{,}059a^3 \cdot \sigma_{pl}
\end{aligned}
$$