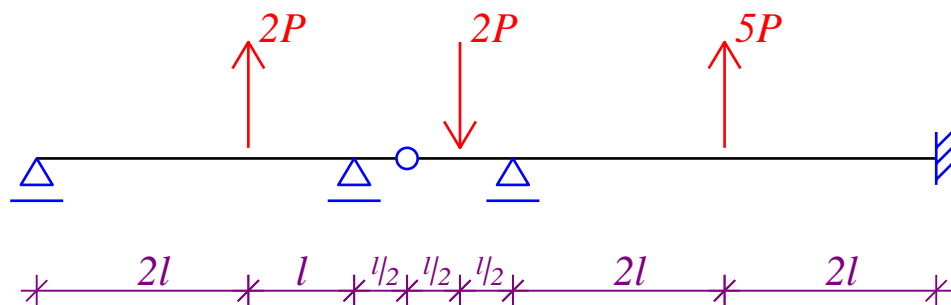


## Przykład 10.2. Obliczenie obciążenia granicznego

Obliczyć obciążenie graniczne  $P_{gr}$  dla poniższej belki. Przekrój poprzeczny i granica plastyczności są stałe. Graniczny moment plastyczny, przy którym następuje uplastycznienie całego przekroju poprzecznego wynosi  $M_{pl}$ .



### Rozwiązanie

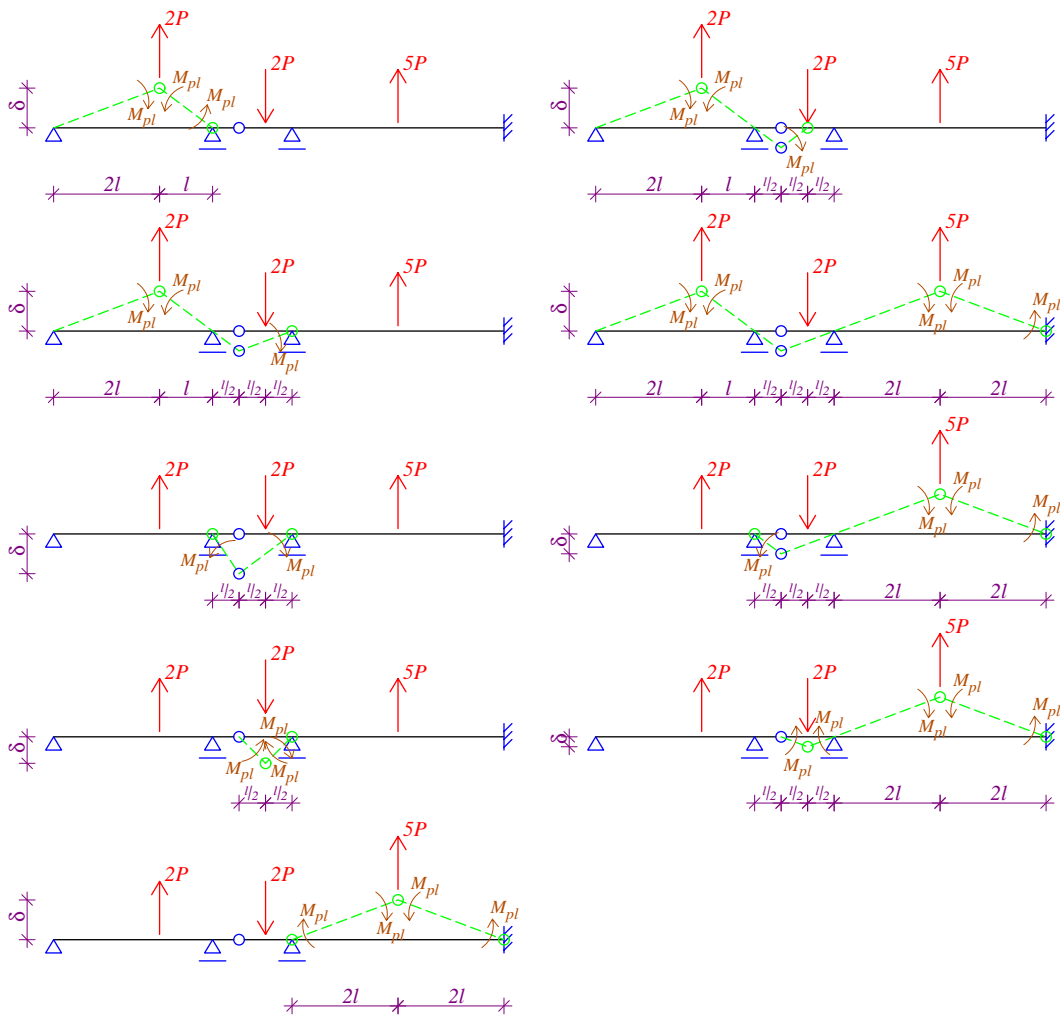
Obciążenie graniczne jest to obciążenie wywołujące powstanie w konstrukcji odkształceń plastycznych, które powodują zamianę konstrukcji w mechanizm. Stan naprężenia w konstrukcji poddanej obciążeniu granicznemu spełnia warunki równowagi i warunki plastyczności, a stan przemieszczenia jest kinematycznie dopuszczalny, czyli zgodny z więzami. Do określenia obciążenia granicznego używane są dwa podejścia: statyczne i kinematyczne. Rozważane zadanie rozwiążemy za pomocą podejścia kinematycznego. W tym podejściu wyznaczania obciążenia granicznego algorytm jest następujący:

1. ustala się liczbę uplastycznianych przekrojów (w przypadku zginanej belki – przegubów plastycznych) – rozpatrywana belka jest 2-krotnie statycznie niewyznaczalna, w związku z tym należy wprowadzić co najwyżej trzy przeguby plastyczne, aby powstał mechanizm o jednym stopniu swobody;
2. zakłada się kinematycznie dopuszczalny schemat zniszczenia, to znaczy zgodny z więzami, o jednym stopniu swobody. Kierunek przemieszczeń ustala się tak, aby praca obciążeń zewnętrznych była dodatnia;
3. kierunki sił przekrojowych w uplastycznionych przekrojach (kierunki momentów plastycznych w przegubach plastycznych – w przypadku zginania belki) ustala się tak, aby były przeciwne do kierunku przemieszczeń (obrotów w przypadku zginania);
4. z warunku równowagi lub równania pracy wirtualnej oblicza się obciążenie niszczące odpowiadające rozpatrywanemu schematowi zniszczenia;
5. najmniejsze obciążenie, ze zbioru wartości obciążeń obliczonych dla poszczególnych schematów zniszczenia, jest obciążeniem granicznym.

Przeguby plastyczne należy umieszczać w tych przekrojach, w których mogą wystąpić ekstrema lokalne momentu zginającego, tj. w rozpatrywanym przypadku w przekrojach podporowych oraz w przekrojach obciążonych siłami skupionymi.

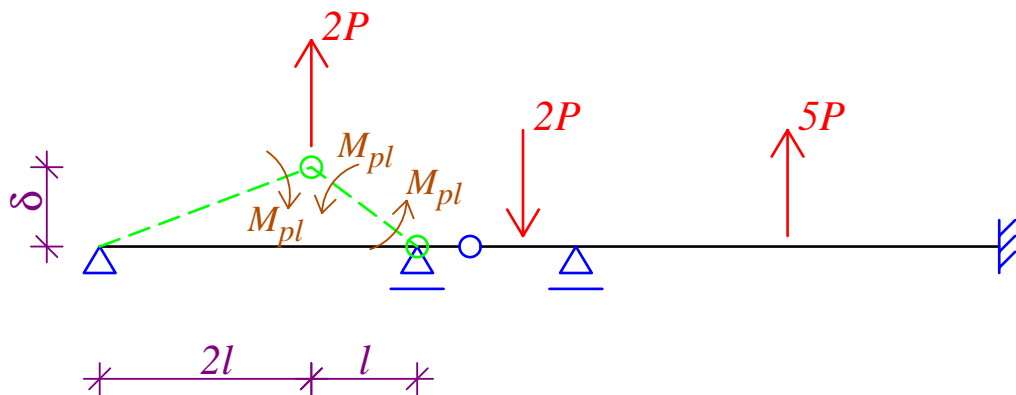
Uzewewnętrzniając momenty plastyczne należy pamiętać, że praca tych momentów musi być ujemna, tzn. kierunek momentu plastycznego musi być taki, aby przeciwdziałać założonemu obrotowi pręta.

W rozpatrywanym przypadku należy rozpatrzyć mechanizmy zniszczenia przedstawione na rysunkach na następnej stronie.



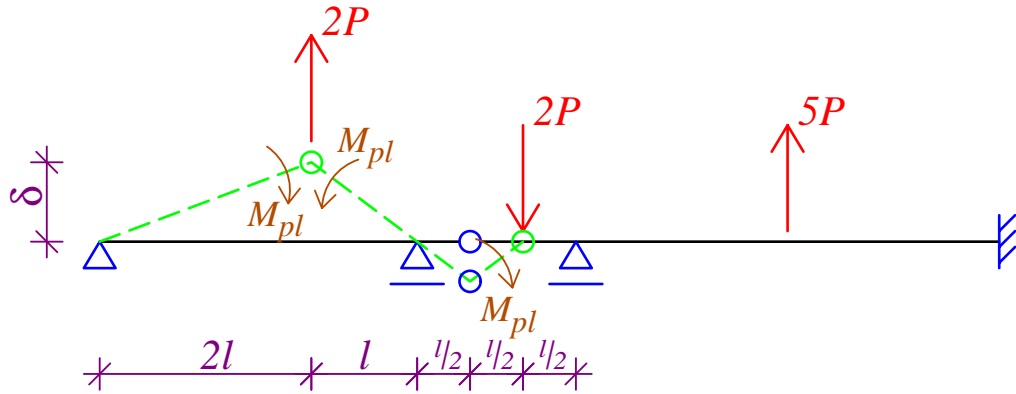
Dla wszystkich schematów zniszczenia układamy równania pracy wirtualnej i wyliczamy wartości obciążenia  $P$  odpowiadające danemu schematowi.

Schemat I.



$$2P \cdot \delta - M_{pl} \cdot \frac{\delta}{2l} - 2M_{pl} \cdot \frac{\delta}{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad P = \frac{5}{4} \frac{M_{pl}}{l}$$

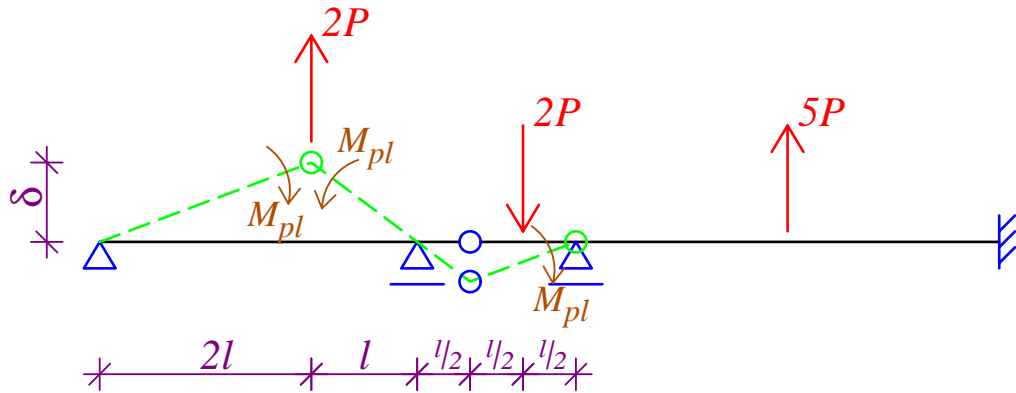
Schemat II.



$$2P \cdot \delta - M_{pl} \cdot \frac{\delta}{2l} - M_{pl} \cdot \frac{\delta}{l} - M_{pl} \cdot \frac{\delta \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2P = \frac{5 M_{pl}}{2 l} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{5 M_{pl}}{4 l}$$

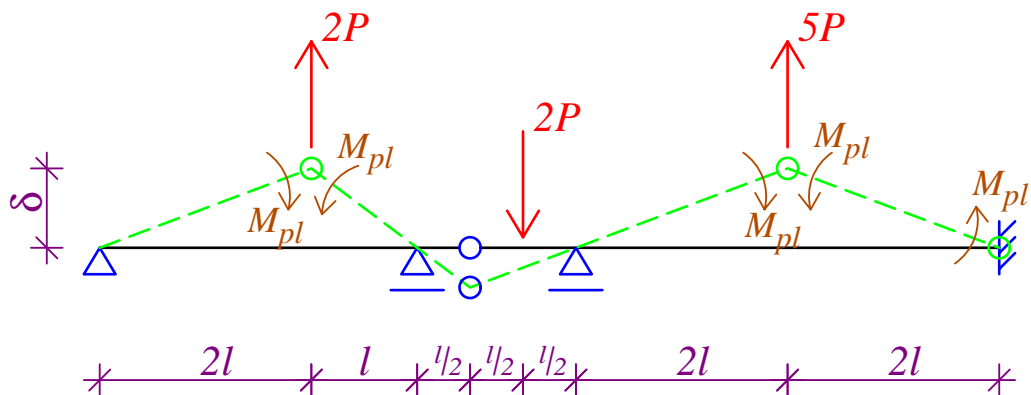
Schemat III.



$$2P \cdot \delta + 2P \cdot \delta \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} - M_{pl} \cdot \frac{\delta}{2l} - M_{pl} \cdot \frac{\delta}{l} - M_{pl} \cdot \frac{\delta}{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{2} P = 2 \frac{M_{pl}}{l} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{4 M_{pl}}{5 l}$$

Schemat IV.

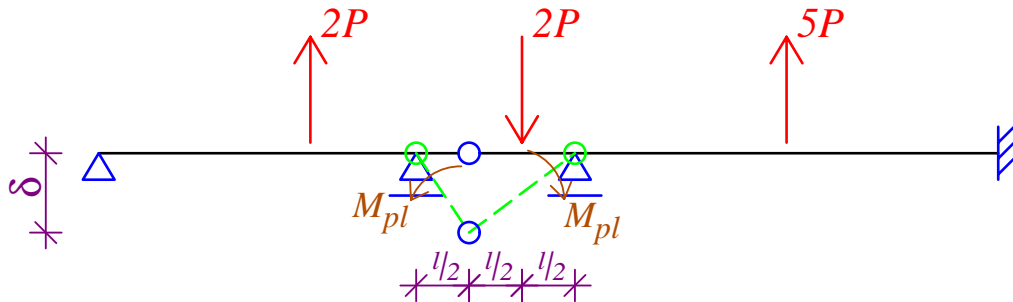


$$2P \cdot \delta + 2P \cdot \delta \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} + 5P \cdot \delta +$$

$$- M_{pl} \cdot \frac{\delta}{2l} - M_{pl} \cdot \frac{\delta}{l} - M_{pl} \cdot \frac{\delta}{2l} - 2M_{pl} \cdot \frac{\delta}{2l} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{15}{2}P = 3 \frac{M_{pl}}{l} \quad \Rightarrow$$

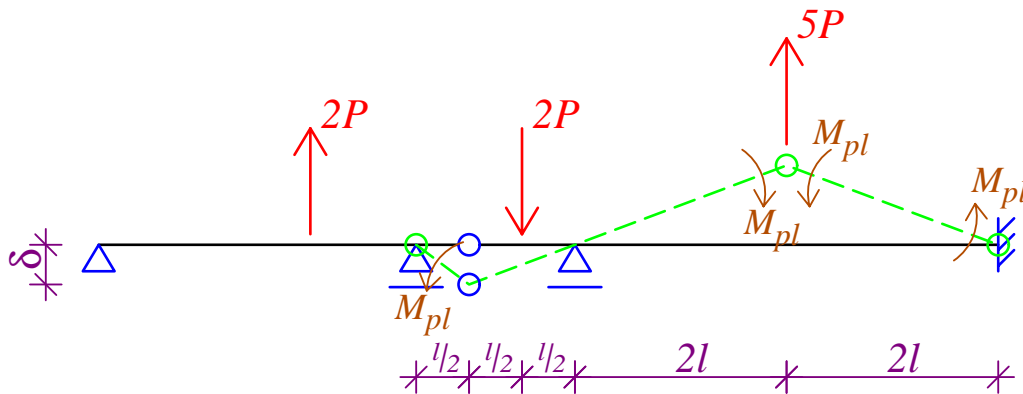
$$\Rightarrow \quad P = \frac{2}{5} \frac{M_{pl}}{l}$$

Schemat V.



$$2P \cdot \delta \cdot \frac{l}{2} - M_{pl} \cdot \frac{\delta}{2} - M_{pl} \cdot \frac{\delta}{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad P = 3 \frac{M_{pl}}{l}$$

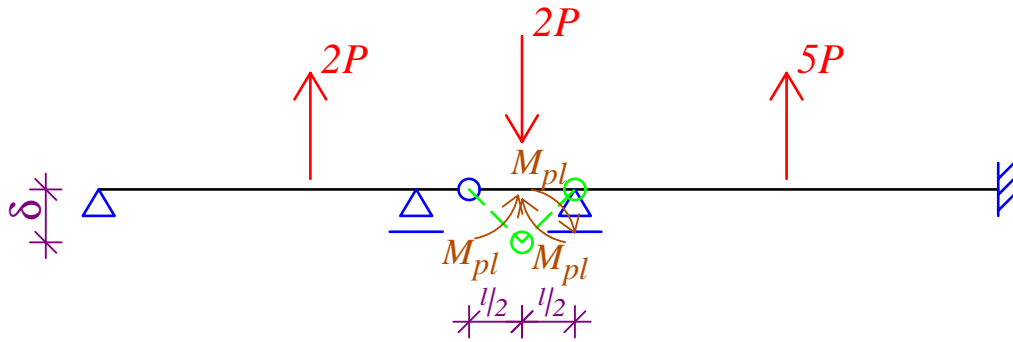
Schemat VI.



$$2P \cdot \delta \cdot \frac{l}{2} + 5P \cdot \delta \cdot \frac{2l}{l} - M_{pl} \cdot \frac{\delta}{2} - M_{pl} \cdot \frac{2\delta}{2l} - 2 \cdot M_{pl} \cdot \frac{2\delta}{2l} = 0 \quad \Rightarrow$$

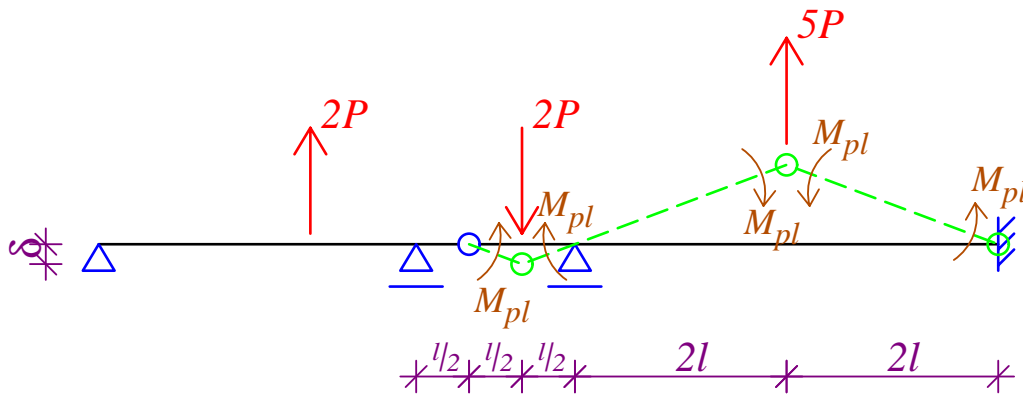
$$\Rightarrow \quad 11P = 5 \frac{M_{pl}}{l} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{5}{11} \frac{M_{pl}}{l}$$

Schemat VII.



$$2P \cdot \delta - M_{pl} \cdot \frac{\delta}{\frac{l}{2}} - 2M_{pl} \cdot \frac{\delta}{\frac{l}{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad P = 3 \frac{M_{pl}}{l}$$

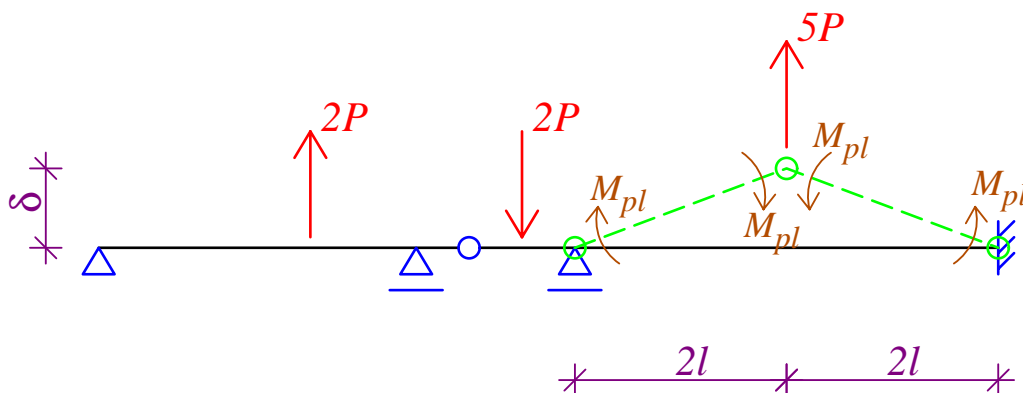
Schemat VIII.



$$2P \cdot \delta + 5P \cdot \delta \cdot \frac{2l}{\frac{l}{2}} - M_{pl} \cdot \frac{\delta}{\frac{l}{2}} - M_{pl} \cdot \frac{\delta}{\frac{l}{2}} - M_{pl} \cdot \frac{\delta \cdot \frac{2l}{\frac{l}{2}}}{2l} - 2 \cdot M_{pl} \cdot \frac{\delta \cdot \frac{2l}{\frac{l}{2}}}{2l} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 22P = 10 \frac{M_{pl}}{l} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{5}{11} \frac{M_{pl}}{l}$$

Schemat IX.



$$5P \cdot \delta - 2M_{pl} \cdot \frac{\delta}{2l} - 2M_{pl} \cdot \frac{\delta}{2l} = 0 \quad \implies \quad P = \frac{2 M_{pl}}{5 l}$$

Najmniejsza wartość obciążenia powodującego powstanie schematu zniszczenia jest obciążeniem granicznym wyznaczonym metodą kinematyczną.

$$P_{gr}^k = \min \left( \frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 3, \frac{5}{11}, 3, \frac{5}{11}, \frac{2}{5} \right) \cdot \frac{M_{pl}}{l} = \frac{2 M_{pl}}{5 l}$$

Oznacza to, że przekształcenie konstrukcji w mechanizm następuje według schematu IV. lub IX. bądź wg schematu będącego kombinacją tych dwóch schematów.

Można udowodnić, że rzeczywiste obciążenie graniczne zawarte jest w przedziale

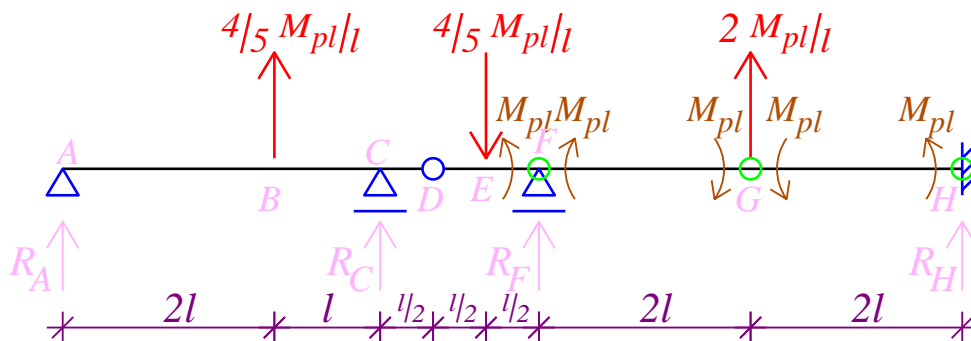
$$P_{gr}^s \leq P_{gr} \leq P_{gr}^k$$

gdzie  $P_{gr}^s$  oznacza obciążenie graniczne wyznaczone metodą statyczną. W przypadku, gdy

$$P_{gr}^s = P_{gr} = P_{gr}^k$$

mamy do czynienia z rozwiązaniem zupełnym, zwanym również kompletnym lub ścisłym. Oznacza to, że mechanizm zniszczenia wyznaczony metodą rozwiązania kinematycznego jest stowarzyszony z rozwiązaniem statycznym.

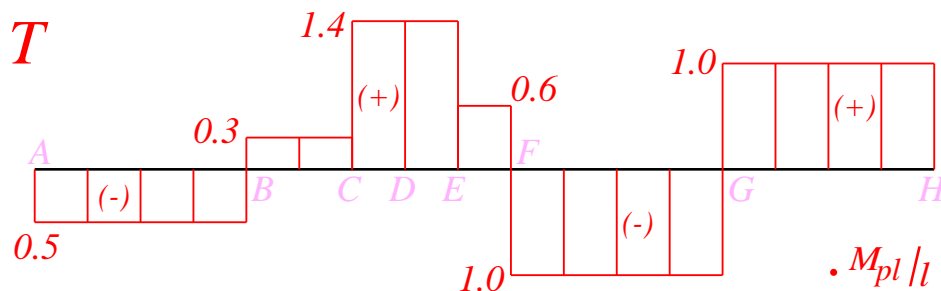
Sprawdźmy, czy dla wyznaczonego obciążenia granicznego spełnione są wymagania podejścia statycznego. W tym celu należy narysować wykres momentów zginających odpowiadający schematowi zniszczenia. Rozpatrzmy schemat IX. Interesować nas będą wartości momentów zginających w punktach, w których wykres momentu może osiągać ekstrema lokalne, tj. w punktach  $B$ ,  $C$ ,  $D$  i  $E$ .



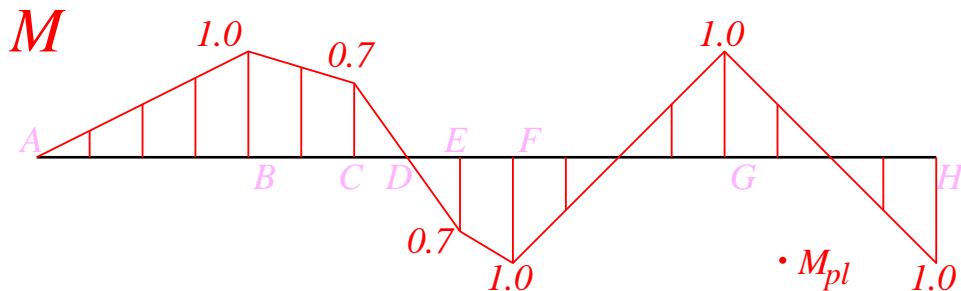
$$\begin{aligned} \sum M_G^p = 0 &\implies R_H \cdot 2l + M_{pl} + M_{pl} = 0 \implies R_H = -\frac{M_{pl}}{l} \\ \sum M_D^p = 0 &\implies R_H \cdot 5l + M_{pl} + M_{pl} + 2\frac{M_{pl}}{l} \cdot 3l - M_{pl} - M_{pl} + R_F \cdot l + \\ &+ M_{pl} - \frac{4}{5}\frac{M_{pl}}{l} \cdot \frac{l}{2} = 0 \implies \\ &\implies R_F = -5 \left( -\frac{M_{pl}}{l} \right) - 6\frac{M_{pl}}{l} - \frac{M_{pl}}{l} + \frac{2}{5}\frac{M_{pl}}{l} \implies \\ &\implies R_F = -\frac{8}{5}\frac{M_{pl}}{l} \\ \sum M_A^p = 0 &\implies R_H \cdot \frac{17}{2}l + M_{pl} + M_{pl} + 2\frac{M_{pl}}{l} \cdot \frac{13}{2}l - M_{pl} - M_{pl} + R_F \cdot \frac{9}{2}l + \\ &+ M_{pl} - \frac{4}{5}\frac{M_{pl}}{l} \cdot 4l + R_C \cdot 3l + \frac{4}{5}\frac{M_{pl}}{l} \cdot 2l = 0 \implies \\ &\implies 3R_C l = - \left( -\frac{M_{pl}}{l} \right) \frac{17}{2}l - 13M_{pl} - \left( -\frac{8}{5}\frac{M_{pl}}{l} \right) \frac{9}{2}l - M_{pl} + \\ &+ \frac{16}{5}\frac{M_{pl}}{l} - \frac{8}{5}\frac{M_{pl}}{l} \implies \\ &\implies 3R_C l = \left( \frac{17}{2} - 14 + \frac{36}{5} + \frac{8}{5} \right) M_{pl} \implies \\ &\implies R_C = \frac{17 \cdot 5 - 14 \cdot 10 + 44 \cdot 2}{3 \cdot 10} \frac{M_{pl}}{l} \implies \\ &\implies R_C = \frac{85 - 140 + 88}{30} \frac{M_{pl}}{l} \implies R_C = \frac{33}{30} \frac{M_{pl}}{l} \implies \\ &\implies R_C = \frac{11}{10} \frac{M_{pl}}{l} \\ \sum M_D^l = 0 &\implies R_A \cdot \frac{7}{2}l + \frac{4}{5}\frac{M_{pl}}{l} \cdot \frac{3}{2}l + R_C \cdot \frac{1}{2}l = 0 \implies \\ &\implies \frac{7}{2}R_A l = -\frac{6}{5}M_{pl} - \frac{11}{10}\frac{M_{pl}}{l} \frac{1}{2}l \implies \\ &\implies \frac{7}{2}R_A l = -\frac{35}{20}M_{pl} \implies R_A = -\frac{1}{2}\frac{M_{pl}}{l} \end{aligned}$$

Dodatkowo sprawdzimy warunek

$$\begin{aligned} \sum P_y &= R_A + \frac{4}{5}\frac{M_{pl}}{l} + R_C - \frac{4}{5}\frac{M_{pl}}{l} + R_F + 2\frac{M_{pl}}{l} + R_H = \\ &= -\frac{M_{pl}}{2l} + \frac{11}{10}\frac{M_{pl}}{l} - \frac{8}{5}\frac{M_{pl}}{l} + 2\frac{M_{pl}}{l} - \frac{M_{pl}}{l} = \frac{-5 + 11 - 16}{10} \frac{M_{pl}}{l} + \frac{M_{pl}}{l} = 0 \end{aligned}$$



Stowarzyszony wykres momentów zginających ma więc postać



Ponieważ spełniony jest warunek plastyczności  $|M| \leq M_{pl}$  otrzymane rozwiązanie jest zupełne.

Warto zapamiętać, że w przypadku belek wieloprzęsłowych, na które działa obciążenie zewnętrzne o różnych znakach, obciążenia odpowiadające schematom zniszczenia w których powstają przemieszczenia w większej liczbie przęseł są mniejsze niż obciążenia odpowiadające schematom zniszczenia pojedynczych przęseł. Inaczej jest, gdy obciążenia zewnętrzne mają jednakowe znaki – w takich przypadkach mniejsze wartości obciążenia otrzymujemy dla schematów zniszczenia pojedynczych przęseł.