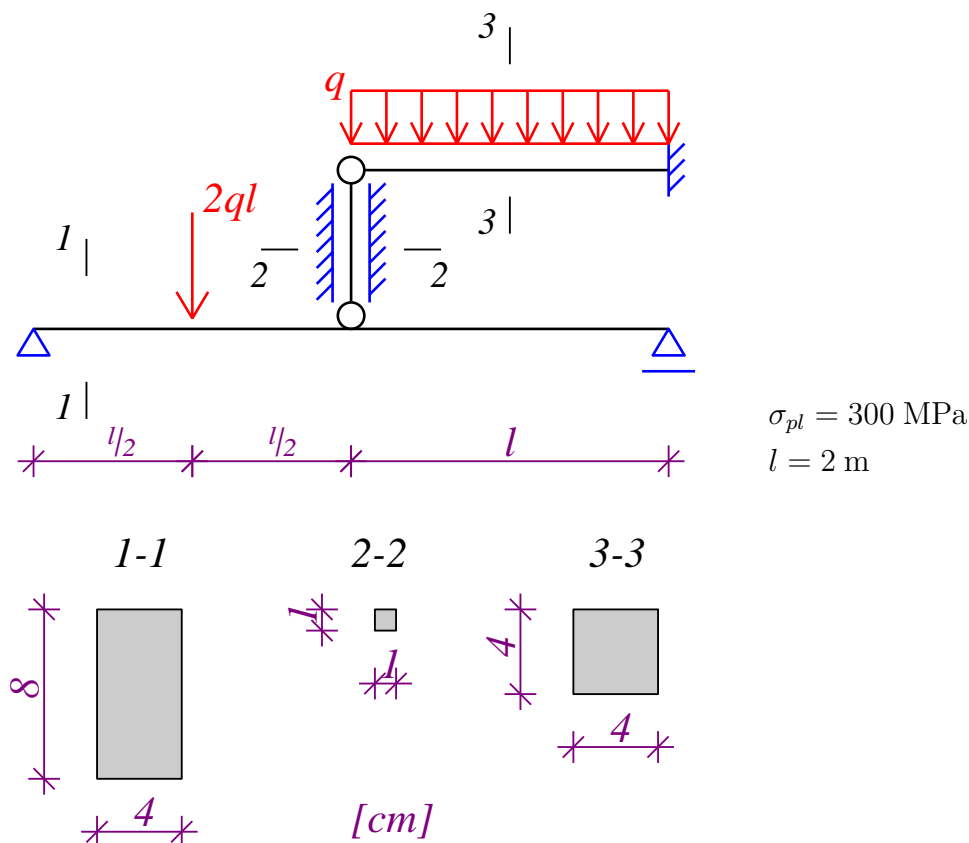


Przykład 10.3. Obliczenie wartości obciążenia granicznego układu belko-słupowego

Obliczyć wartość obciążenia granicznego q_{gr} działającego na poniższy układ.



Do obliczeń przyjąć, że materiał z jakiego wykonane są pręty jest jednakowy, zaś pręt nr 2 jest zabezpieczony przed wyboczeniem.

Rozwiązanie

W celu znalezienia obciążenia granicznego rozpatrzmy kinematycznie możliwe schematy zniszczenia, dla każdego z nich obliczając odpowiadające mu obciążenie zapewniające równowagę układu. Obciążeniem granicznym q_{gr} będzie najmniejsze z tak obliczonych obciążeń.

Uplastycznienie prętów 1 i 3 następuje w wyniku zginania, w przypadku pręta 2 uplastycznienie spowodowane jest siłą osiową.

Odpowiednie wielkości charakterystyczne przekrojów prętów mają wartości:

$$W_{pl}^{p1} = \frac{4 \cdot 8^2}{4} = 64 \text{ cm}^3$$

$$W_{pl}^{p3} = \frac{4 \cdot 4^2}{4} = 16 \text{ cm}^3$$

$$A^{p2} = 1 \text{ cm}^2$$

Tak więc momenty zginające, które powodują uplastycznienie prętów 1 i 3 są odpowiednio

równe:

$$|M_{pl}^{p1}| = \sigma_{pl} \cdot W_{pl}^{p1} = 300 \cdot 10^3 \cdot 64 \cdot 10^{-6} = 19,2 \text{ kNm}$$

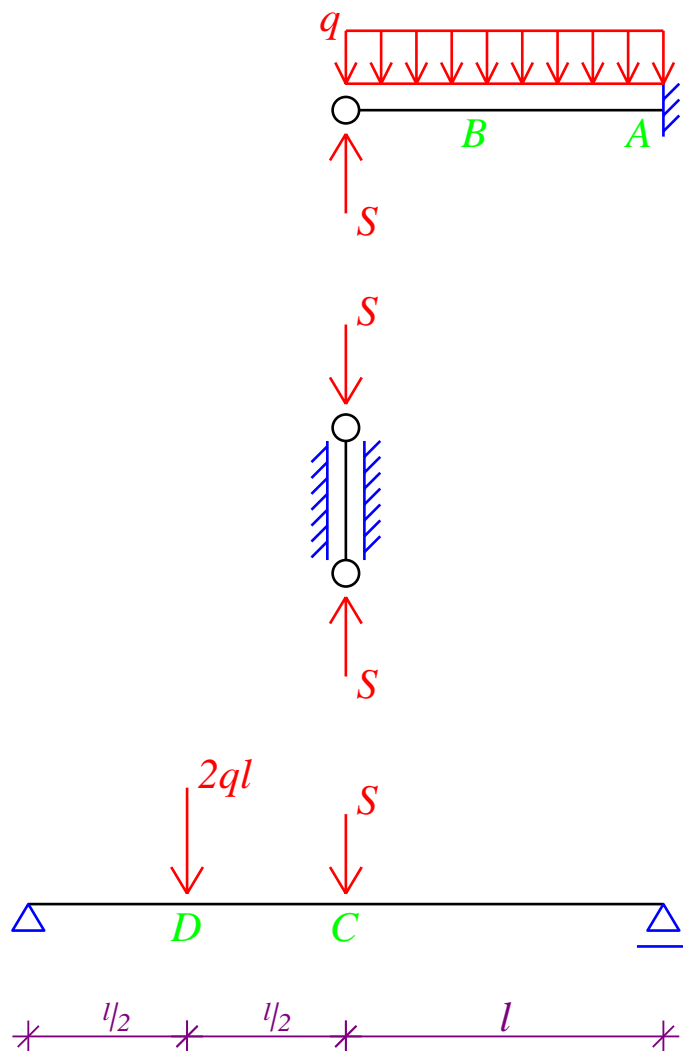
$$|M_{pl}^{p3}| = \sigma_{pl} \cdot W_{pl}^{p3} = 300 \cdot 10^3 \cdot 16 \cdot 10^{-6} = 4,8 \text{ kNm}$$

Do uplastycznienia pręta 2 dochodzi, gdy siła normalna w tym pręcie ma wartość

$$|S_{pl}^{p2}| = \sigma_{pl} \cdot A^{p2} = 300 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-4} = 30 \text{ kN}$$

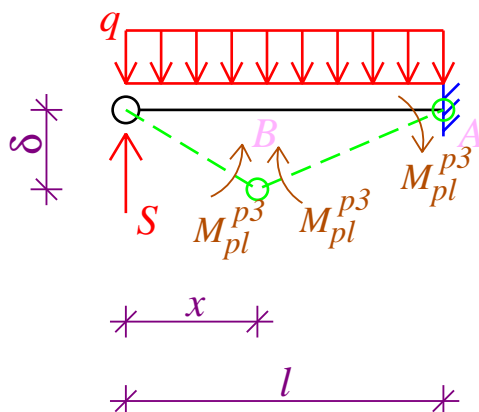
Rozpatruje się uplastycznienie tych przekrojów prętów 1 i 3, w których występują ekstrema momentów zginających, bądź też w pręcie nr 2, na który działa obciążenie osiowe.

Poniższy rysunek przedstawia układ rozłożony na pojedyncze pręty. Zaznaczono na nim również schematycznie punkty, w których można spodziewać się powstania przegubów (punkt B oznacza punkt należący do pręta 3, odpowiadający miejscu występowania lokalnego ekstremum momentu zginającego).



Przy konstruowaniu kinematycznie dopuszczalnych schematów zniszczenia należy pamiętać, że należy przyjmować kierunek przemieszczenia układu w taki sposób, aby praca sił zewnętrznych na tych przemieszczenia była dodatnia. Jednocześnie praca sił wewnętrznych musi być ujemna, a co za tym idzie, przyjęte momenty plastyczne muszą mieć takie zwroty, aby przeciwdziałać założonym obrotom.

Schemat I - uplastycznienie przekrojów A i B



Z równania pracy wirtualnej otrzymujemy

$$q \cdot x \cdot \frac{\delta}{2} + q \cdot (l - x) \cdot \frac{\delta}{2} - M_{pl}^{p3} \cdot \frac{\delta}{x} - 2 \cdot M_{pl}^{p3} \cdot \frac{\delta}{l - x} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{ql}{2} = \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{l - x} \right) M_{pl}^{p3} \quad \Rightarrow \quad q = 2 \frac{l + x}{x(l - x)} \frac{M_{pl}^{p3}}{l}$$

Nieznaną wartość x można łatwo obliczyć korzystając z faktu, że długość odcinka x musi odpowiadać minimalnej wartości obciążenia q , tak więc $\frac{dq(x)}{dx} = 0$. Stąd

$$\frac{dq(x)}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \frac{x(l - x) - (l + x)(l - 2x)}{x^2(l - x)^2} \frac{M_{pl}^{p3}}{l} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2 \frac{lx - x^2 - l^2 + 2lx - lx + 2x^2}{x^2(l - x)^2} \frac{M_{pl}^{p3}}{l} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2 \frac{x^2 + 2lx - l^2}{x^2(l - x)^2} \frac{M_{pl}^{p3}}{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2lx - l^2 = 0$$

pierwiastek z Δ jest równy

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4l^2 + 4l^2} = 2\sqrt{2}l$$

Stąd $\frac{dq(x)}{dx} = 0$ dla następujących wartości x :

$$x_1 = \frac{-2l - 2\sqrt{2}l}{2} = -(\sqrt{2} + 1)l$$

$$x_2 = \frac{-2l + 2\sqrt{2}l}{2} = (\sqrt{2} - 1)l$$

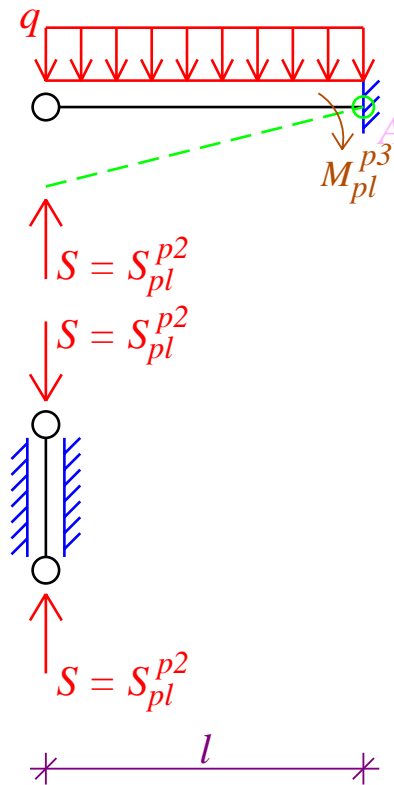
Uwzględnienie faktu, że x musi mieć wartość z przedziału $(0, l)$ prowadzi do odrzucenia rozwiązania x_1 , jako niespełniającego warunków zadania. Tak więc

$$x = x_2 = (\sqrt{2} - 1)l$$

Obciążenie q odpowiadające rozpatrywanemu schematowi zniszczenia ma zatem wartość

$$\begin{aligned}
 q &= 2 \frac{l+x}{x(l-x)} \frac{M_{pl}^{p3}}{l} = 2 \frac{l + (\sqrt{2}-1)l}{(\sqrt{2}-1)l[l - (\sqrt{2}-1)l]} \frac{M_{pl}^{p3}}{l} = \\
 &= 2 \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)(2-\sqrt{2})} \frac{M_{pl}^{p3}}{l^2} = 2 \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-2-2+\sqrt{2}} \frac{M_{pl}^{p3}}{l^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-4} \frac{M_{pl}^{p3}}{l^2} = \\
 &= \frac{2\sqrt{2}(3\sqrt{2}+4)}{(3\sqrt{2}-4)(3\sqrt{2}+4)} \frac{M_{pl}^{p3}}{l^2} = \frac{12+8\sqrt{2}}{18-16} \frac{M_{pl}^{p3}}{l^2} = 2(3+2\sqrt{2}) \frac{M_{pl}^{p3}}{l^2} = \\
 &= 2(3+2\sqrt{2}) \frac{4,8}{2^2} = \frac{12(3+2\sqrt{2})}{5} \approx 13,99 \frac{\text{kN}}{\text{m}}
 \end{aligned}$$

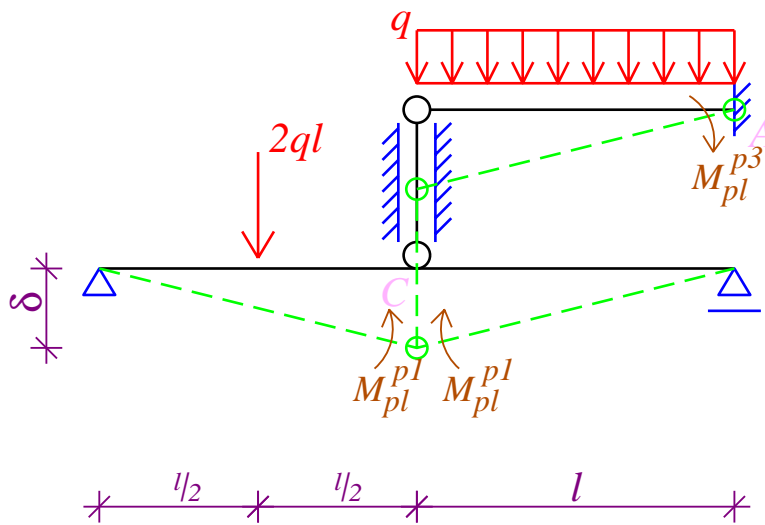
Schemat II - uplastycznienie przekroju A i pręta 2



Wartość, odpowiadającą schematowi uplastycznienia, obciążenia q obliczamy z warunku zerowania się sumy momentów obliczanej względem punktu A .

$$S_{pl}^{p2} \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} + M_{pl}^{p3} = 0 \quad \implies \quad q = 2 \frac{S_{pl}^{p2}}{l} + 2 \frac{M_{pl}^{p3}}{l^2} = 2 \frac{30}{2} + 2 \frac{4,8}{2^2} = 32,4 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Schemat III - uplastycznienie przekrojów A i C



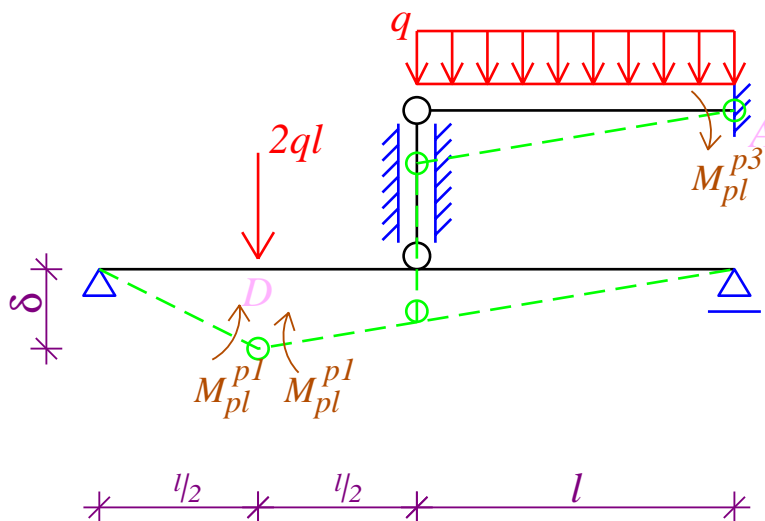
Z równania pracy wirtualnej otrzymujemy

$$2ql \cdot \frac{\delta}{2} + q \cdot l \cdot \frac{\delta}{2} - 2 \cdot M_{pl}^{p1} \cdot \frac{\delta}{l} - M_{pl}^{p3} \cdot \frac{\delta}{l} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{2}ql = \frac{2M_{pl}^{p1} + M_{pl}^{p3}}{l} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad q = \frac{2(2M_{pl}^{p1} + M_{pl}^{p3})}{3l^2} = \frac{2(2 \cdot 19,2 + 4,8)}{3 \cdot 2^2} = 7,2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Schemat IV - uplastycznienie przekrojów A i D



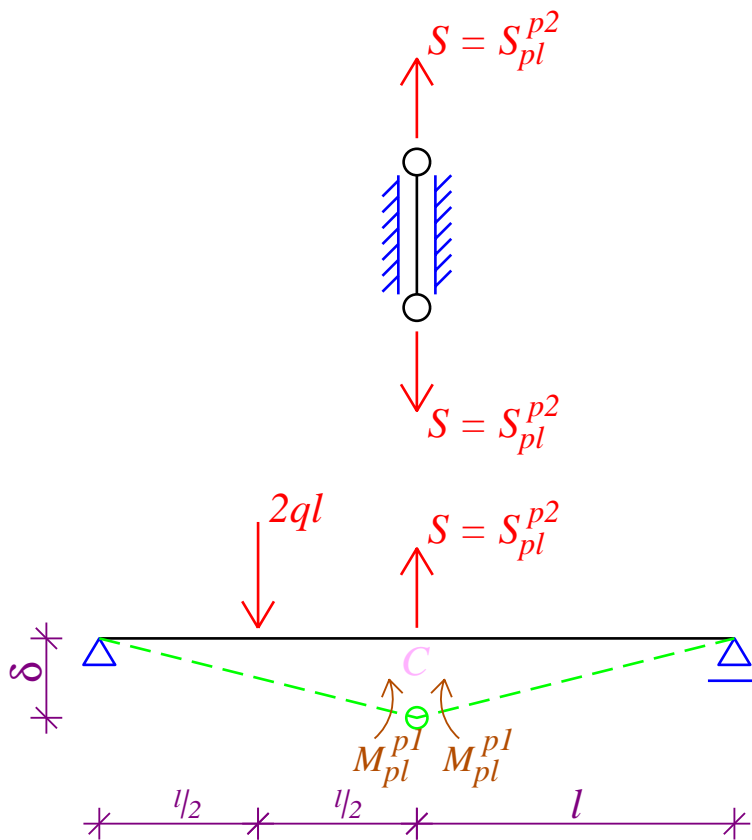
Z równania pracy wirtualnej otrzymujemy

$$2ql \cdot \delta + q \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{\frac{3}{2}l} \delta - M_{pl}^{p1} \cdot \frac{\delta}{\frac{l}{2}} - M_{pl}^{p1} \cdot \frac{\delta}{\frac{3}{2}l} - M_{pl}^{p3} \cdot \frac{\frac{l}{2} \delta}{l} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{7}{3} ql = \frac{8}{3} \frac{M_{pl}^{p1}}{l} + \frac{2}{3} \frac{M_{pl}^{p3}}{l} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad q = \frac{2(4M_{pl}^{p1} + M_{pl}^{p3})}{7l^2} = \frac{2(4 \cdot 19,2 + 4,8)}{7 \cdot 2^2} = \frac{204}{35} \approx 5,83 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Schemat V - uplastycznienie przekroju C i pręta 2

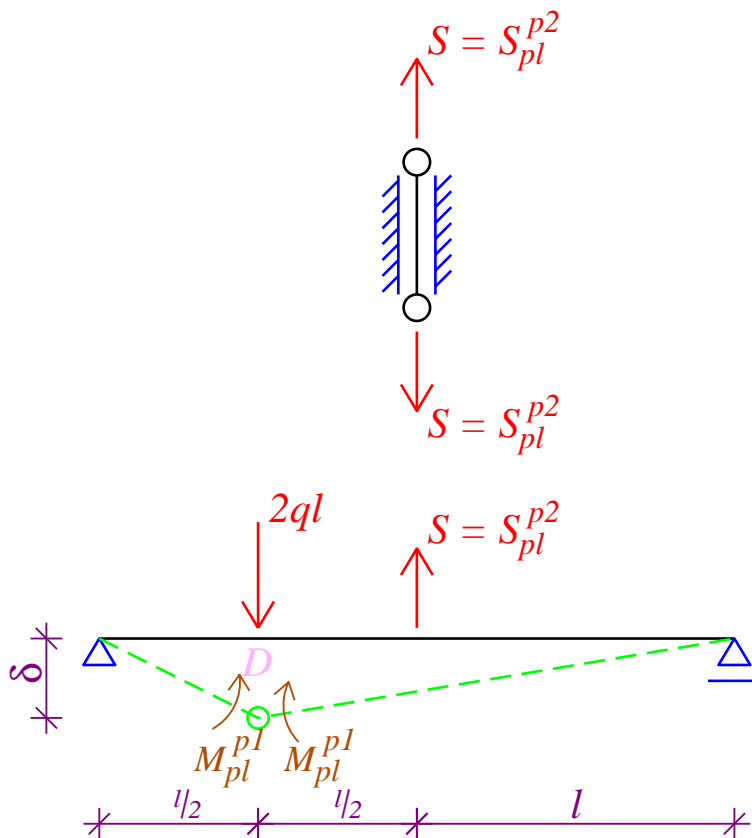


Z równania pracy wirtualnej otrzymujemy

$$2ql \cdot \frac{\delta}{2} - S_{pl}^{p2} \cdot \delta - 2 \cdot M_{pl}^{p1} \cdot \frac{\delta}{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{2M_{pl}^{p1} + S_{pl}^{p2}l}{l^2} = \frac{2 \cdot 19,2 + 30 \cdot 2}{2^2} =$$

$$= 24,6 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Schemat VI - uplastycznienie przekroju D i pręta 2



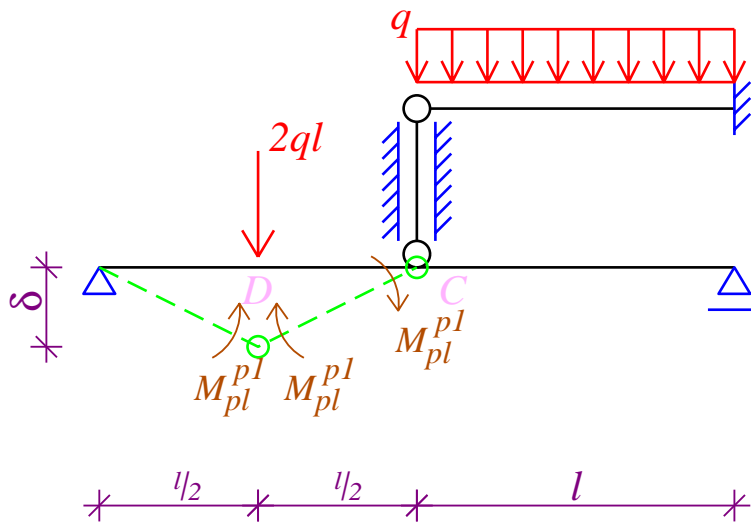
Z równania pracy wirtualnej otrzymujemy

$$2ql \cdot \delta - S_{pl}^{p2} \cdot \frac{l}{3} \delta - M_{pl}^{p1} \cdot \frac{\delta}{2} - M_{pl}^{p1} \cdot \frac{\delta}{2} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2ql = \frac{8}{3} \frac{M_{pl}^{p1}}{l} + \frac{2}{3} S_{pl}^{p2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = \frac{4M_{pl}^{p1} + S_{pl}^{p2}l}{3l^2} = \frac{4 \cdot 19,2 + 30 \cdot 2}{3 \cdot 2^2} = 11,4 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Schemat VII - uplastycznienie przekrojów C i D



Z równania pracy wirtualnej otrzymujemy

$$2ql \cdot \delta - 3 \cdot M_{pl}^{pl} \frac{\delta}{\frac{l}{2}} = 0 \quad \implies \quad q = 3 \frac{M_{pl}^{pl}}{l^2} = 3 \cdot \frac{19,2}{2^2} = 14,4 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

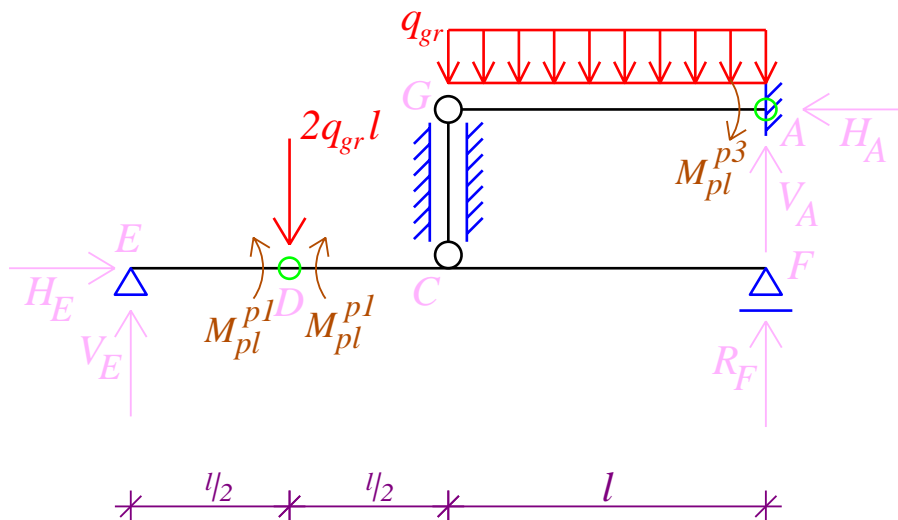
Poszukiwana wartość obciążenia granicznego q_{gr} jest równa najmniejszej spośród obliczonych wartości q , czyli

$$q_{gr} = \min \left(\frac{12(3 + 2\sqrt{2})}{5} \approx 13,99; 32,4; 7,2; \frac{204}{35} \approx 5,83; 24,6; 11,4; 14,4 \right) =$$

$$= \frac{204}{35} \frac{\text{kN}}{\text{m}} \approx 5,83 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

zaś konstrukcja przekształca się w mechanizm wg schematu IV.

Sprawdźmy, czy uzyskane rozwiązanie jest rozwiązaniem zupełnym.



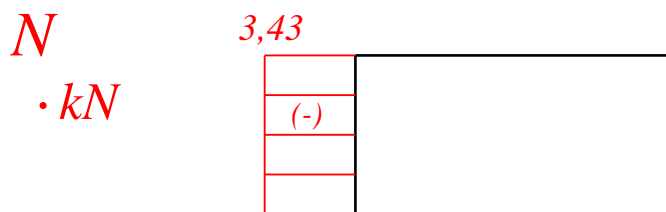
W celu wyznaczenia reakcji dokonano następujących obliczeń:

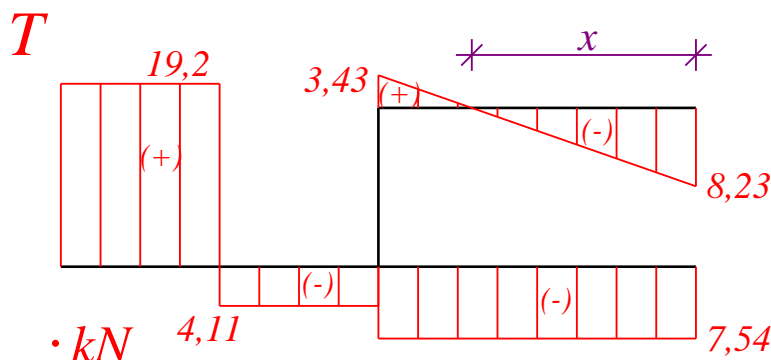
$$\begin{aligned}
 \sum M_G^p = 0 &\implies V_A \cdot l - M_{pl}^{p3} - q_{gr} \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0 \implies \\
 &\implies V_A \cdot 2 = 4,8 + \frac{204 \cdot 2^2}{2} \implies \\
 &\implies 2V_A = \frac{48}{10} + \frac{408}{35} \implies V_A = \frac{12 \cdot 7 + 204}{35} \implies \\
 &\implies V_A = \frac{288}{35} \text{ kN} \approx 8,23 \text{ kN} \\
 \sum M_C^g = 0 &\implies V_A \cdot l - M_{pl}^{p3} - q_{gr} \cdot l \cdot \frac{l}{2} + H_A \cdot |CG| = 0 \implies \\
 &\implies \sum M_G^p + H_A \cdot |CG| = 0 \implies \\
 &\implies 0 + H_A \cdot |CG| = 0 \implies H_A = 0 \\
 \sum P_x = 0 &\implies H_E = H_A \implies H_E = 0 \\
 \sum M_D^l = 0 &\implies V_E \cdot \frac{l}{2} - M_{pl}^{p1} = 0 \implies V_E = \frac{2 \cdot 19,2}{2} \implies \\
 &\implies V_E = 19,2 \text{ kN} \\
 \sum P_y = 0 &\implies V_E - 2q_{gr}l - q_{gr}l + V_F + V_A = 0 \implies \\
 &\implies V_E = -19,2 + 3 \cdot \frac{204}{35} \cdot 2 - \frac{288}{35} \implies \\
 &\implies V_E = -\frac{192}{10} + \frac{6 \cdot 204 - 288}{35} \implies \\
 &\implies V_E = -\frac{96}{5} + \frac{936}{35} \implies \\
 &\implies V_E = \frac{-96 \cdot 7 + 936}{35} \implies V_E = \frac{264}{35} \text{ kN} \approx 7,54 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

Siła normalna w przęcie nr 2 jest więc równa

$$S = q_{gr} \cdot l - V_A = \frac{204}{35} \cdot 2 - \frac{288}{35} = \frac{120}{35} = \frac{24}{7} \text{ kN} \approx 3,43 \text{ kN} < S_{pl}^{p2} = 30 \text{ kN}$$

Stąd wykresy siły normalnej i tnącej mają postać:





Zerowanie się wykresu siły tnącej w odległości x od podpory A świadczy o występowaniu w tym miejscu lokalnego ekstremum momentu zginającego.

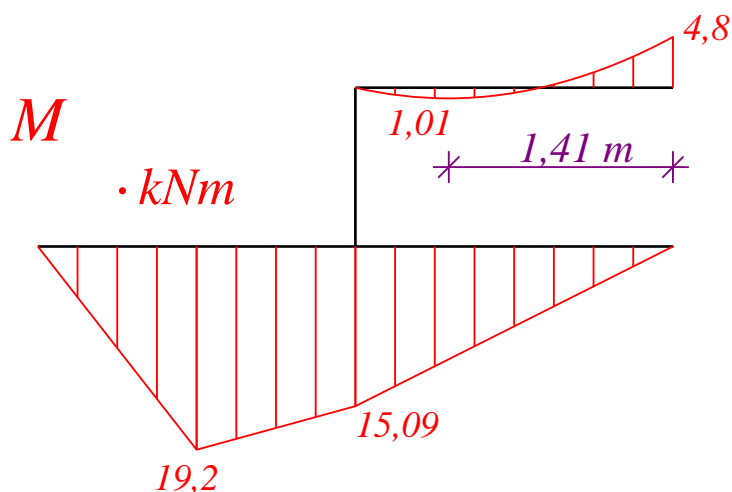
$$V_A - q_{gr} \cdot x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{V_A}{q_{gr}} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\frac{288}{35}}{\frac{204}{35}} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{72}{51} \text{ m} \approx 1,41 \text{ m}$$

$$M_{max} = V_A \cdot x - M_{pl}^3 - q_{gr} \cdot x \cdot \frac{x}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad M_{max} = \frac{288}{35} \cdot \frac{72}{51} - 4,8 - \frac{204}{35} \cdot \frac{72}{51} \cdot \frac{36}{51} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad M_{max} = \frac{6912}{595} - \frac{24}{5} - \frac{3456}{595} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad M_{max} = \frac{120}{119} \text{ kNm} \approx 1,01 \text{ kNm}$$



Warunki plastyczności są spełnione ($|M| \leq 19,2 \text{ kNm}$ w przypadku pręta nr 1 i $|M| \leq 4,8 \text{ kNm}$ w przypadku pręta nr 3 oraz $|S| \leq S_{pl}$ w przypadku pręta nr 2). Oznacza to, że otrzymane rozwiązanie jest rozwiązaniem zupełnym, ponieważ spełnia wszystkie równania: warunki kinematyczne, równania równowagi i warunki plastyczności. Przewidując, że dany schemat zniszczenia odpowiada obciążeniu granicznemu wystarczy wyznaczyć siły przekrojowe i sprawdzić, czy spełniają one warunki plastyczności. Wyznaczenie sił przekrojowych nie zawsze jest proste, ponieważ nieruchoma część układu może pozostać układem statycznie niewyznaczalnym.