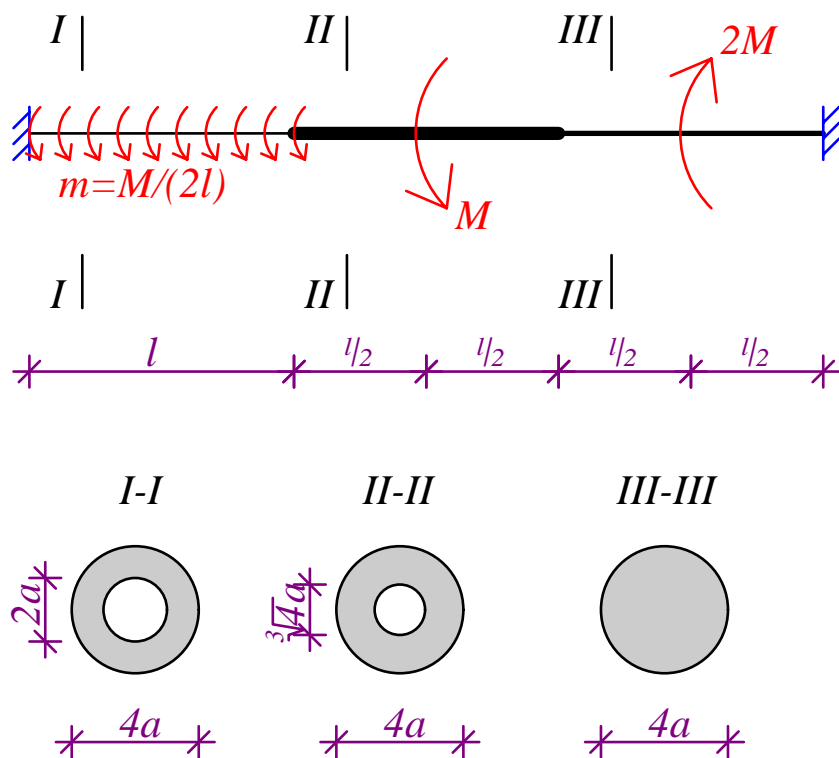


Przykład 10.4. Obliczenie obciążenia granicznego w przypadku skręcania

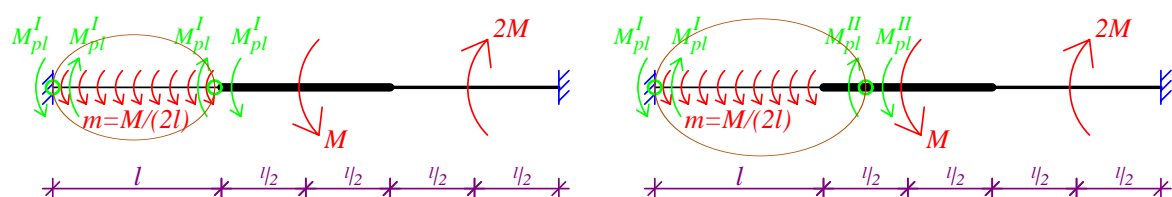
Obliczyć obciążenie graniczne dla poniższego pręta poddanego skręcaniu. Pręt wykonany został z jednego materiału.

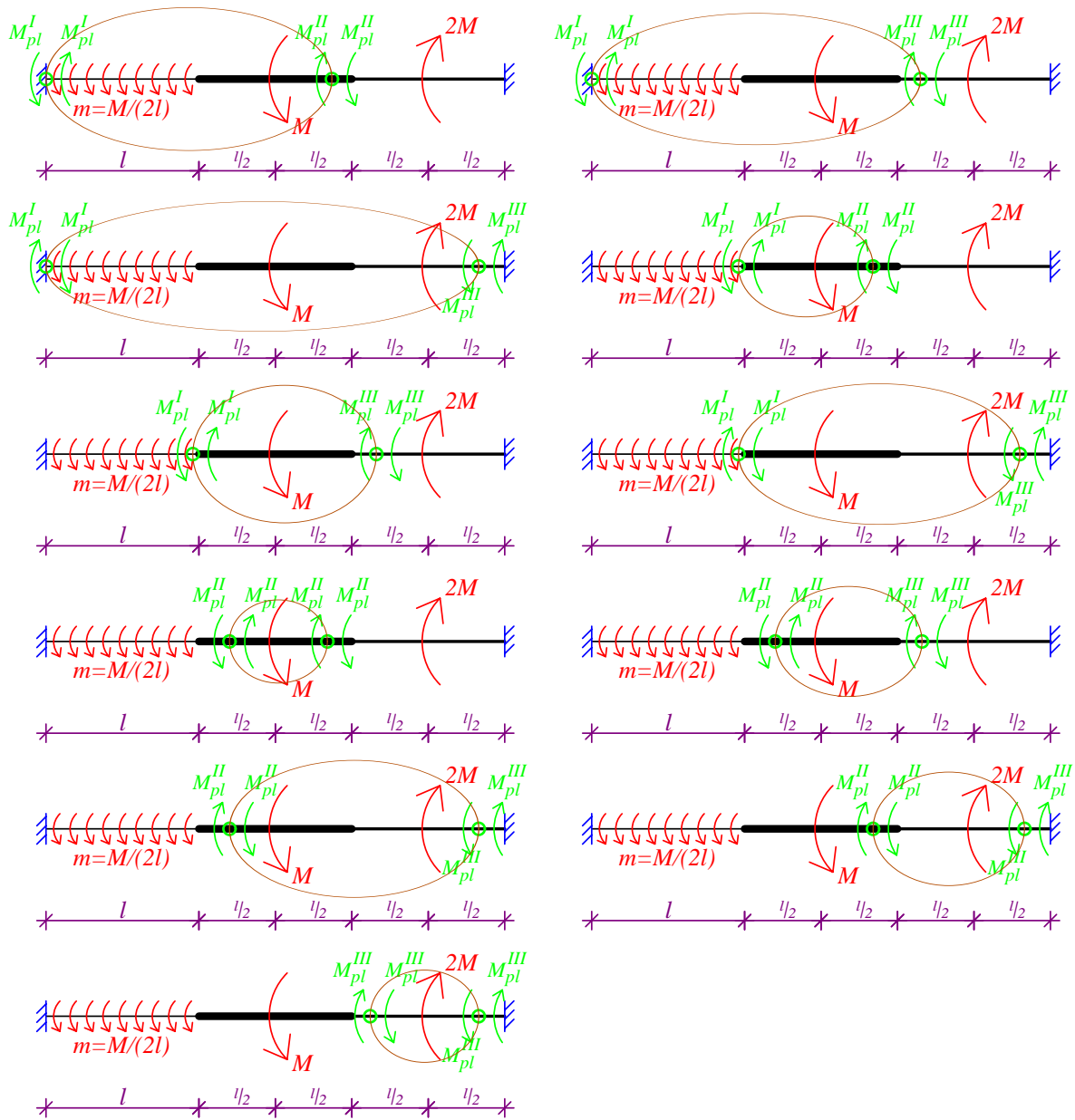


Rozwiązanie

Przedstawione zadanie zostanie rozwiązane za pomocą podejścia kinematycznego, tak więc rozpatrzone zostaną wszystkie kinematycznie dopuszczalne schematy zniszczenia, przyjęte kierunki przemieszczeń (skręcenia pręta) będą takie, by praca obciążeń zewnętrznych była dodatnia, zaś kierunki sił przekrojowych w uplastycznionych przekrojach (momentów skręcających) będą przeciwne założonym kierunkom przemieszczeń. Obciążenia niszczące odpowiadające tym schematom wyliczone zostaną z równań pracy wirtualnej. Najmniejsze z tak obliczonych obciążeń niszczących będzie obciążeniem granicznym.

Rozpatrywany układ jest 1-krotnie statycznie niewyznaczalny, co oznacza, że układ przekształci się w mechanizm, gdy pojawią się w nim dwa przeguby plastyczne. Oznacza to, że należy rozpatrzeć trzynaście przedstawionych poniżej schematów zniszczenia (szarą linią obwiedziono te odcinki pręta, które doznają obrotu o kąt ϕ).





Występujące na powyższych rysunkach momenty M_{pl}^i , gdzie $i = I, II, III$ oznaczają momenty skręcające powodujące pełne uplastycznienie przekrojów odpowiednio I, II i III .

$$M_{pl}^i = W_{pl}^i \tau_{pl}$$

gdzie i oznacza numer przekroju, zaś W_{pl}^i wskaźnik plastyczności przy skręcaniu i -tego przekroju.

Wskaźniki plastyczności przy skręcaniu mają zaś następujące wartości:

$$W_{pl}^I = \frac{2}{3}\pi \left((2a)^3 - a^3 \right) = \frac{14}{3}\pi a^3$$

$$W_{pl}^{II} = \frac{2}{3}\pi \left[(2a)^3 - \left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}a \right)^3 \right] = 5\pi a^3$$

$$W_{pl}^{III} = \frac{2}{3}\pi \cdot (2a)^3 = \frac{16}{3}\pi a^3$$

Tak więc

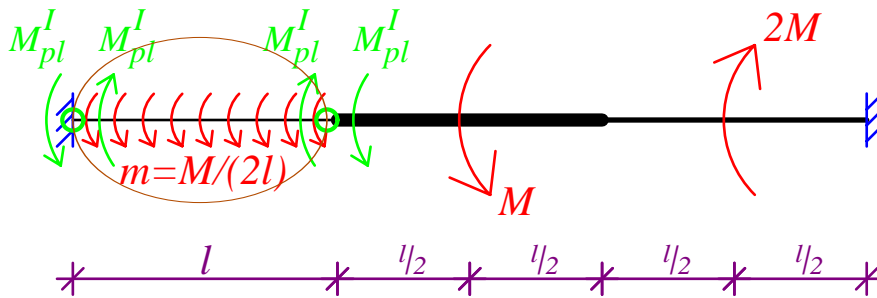
$$M_{pl}^I = \frac{14}{3}\pi a^3 \tau_{pl}$$

$$M_{pl}^{II} = 5\pi a^3 \tau_{pl}$$

$$M_{pl}^{III} = \frac{16}{3}\pi a^3 \tau_{pl}$$

Obecnie zostaną kolejno rozpatrzone schematy zniszczenia.

Schemat I



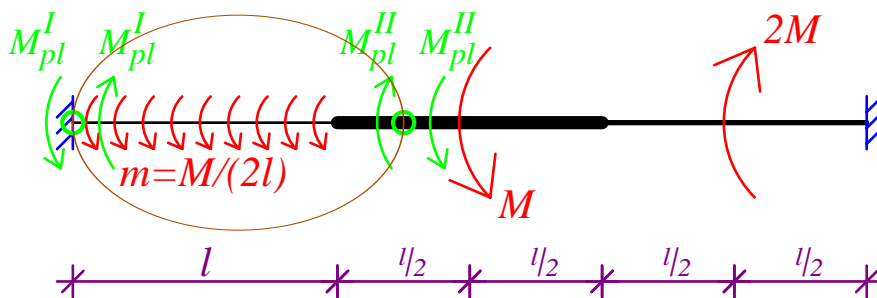
Z równania pracy wirtualnej, przyjmując, że kąt $\delta\phi = 1$, otrzymujemy

$$m \cdot l - M_{pl}^I - M_{pl}^I = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{M}{2l}l = 2M_{pl}^I \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad M = 4M_{pl}^I \quad \Rightarrow \quad M = 4 \cdot \frac{14}{3}\pi a^3 \tau_{pl} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{56}{3}\pi a^3 \tau_{pl} \approx 18,667\pi a^3 \tau_{pl} \approx 58,643a^3 \tau_{pl}$$

Schemat II



Z równania pracy wirtualnej, przyjmując, że kąt $\delta\phi = 1$, otrzymujemy

$$m \cdot l - M_{pl}^I - M_{pl}^{II} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{M}{2l}l = M_{pl}^I + M_{pl}^{II} \quad \Rightarrow$$

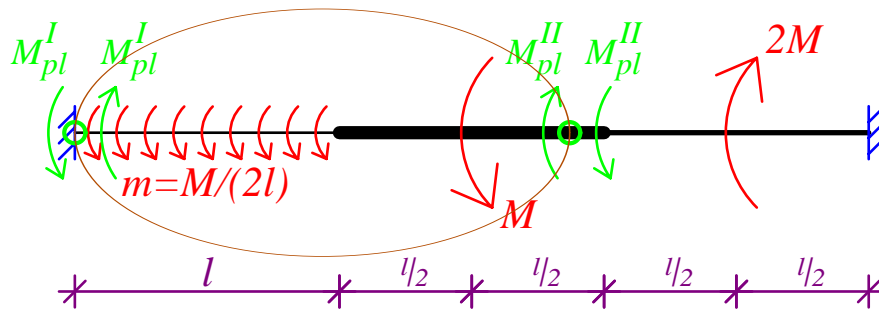
$$\Rightarrow \quad M = 2(M_{pl}^I + M_{pl}^{II}) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad M = 2 \left(\frac{14}{3}\pi a^3 \tau_{pl} + 5\pi a^3 \tau_{pl} \right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{58}{3}\pi a^3 \tau_{pl} \approx 19,333\pi a^3 \tau_{pl} \approx 60,737a^3 \tau_{pl}$$

W tym miejscu warto podkreślić, że jest łatwo zauważyć, że odpowiadające schematowi II obciążenie M jest większe od obciążenia M odpowiadającego schematowi I. Wynika to z faktu, że jedyna różnica pomiędzy schematami I i II dotyczy miejsca powstania drugiego przegubu plastycznego – w przypadku schematu II przegub ten powstaje w przekroju pręta, któremu odpowiada większy moment plastyczny niż w przypadku schematu I ($M_{pl}^{II} = 5\pi a^3 \tau_{pl} > M_{pl}^I = \frac{14}{3}\pi a^3 \tau_{pl}$).

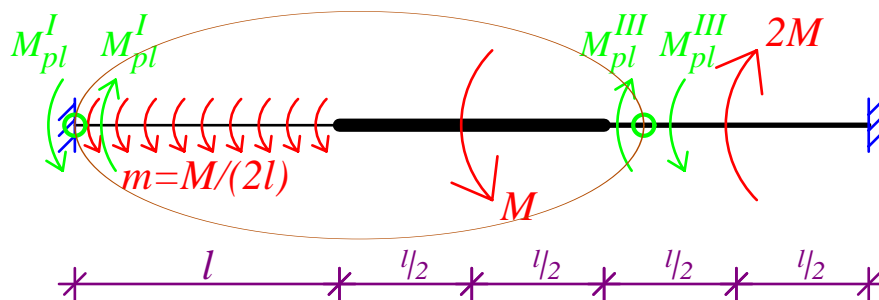
Schemat III



Z równania pracy wirtualnej, przyjmując, że kąt $\delta\phi = 1$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 m \cdot l + M - M_{pl}^I - M_{pl}^{II} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{M}{2l}l + M = M_{pl}^I + M_{pl}^{II} \quad \Rightarrow \\
 \Rightarrow \quad M &= \frac{2}{3} (M_{pl}^I + M_{pl}^{II}) \quad \Rightarrow \\
 \Rightarrow \quad M &= \frac{2}{3} \left(\frac{14}{3}\pi a^3 \tau_{pl} + 5\pi a^3 \tau_{pl} \right) \quad \Rightarrow \\
 \Rightarrow \quad M &= \frac{58}{9}\pi a^3 \tau_{pl} \approx 6,444\pi a^3 \tau_{pl} \approx 20,246a^3 \tau_{pl}
 \end{aligned}$$

Schemat IV

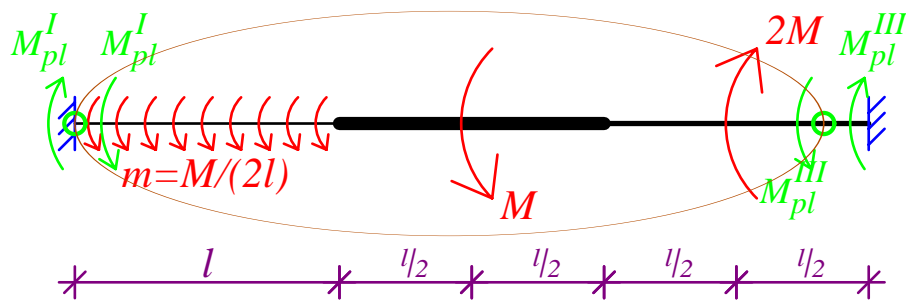


Analogicznie jak w przypadku schematu II warto podkreślić, że jest łatwo zauważyć, że odpowiadające schematowi IV obciążenie M jest większe od obciążenia M odpowiadającego schematowi III. Wynika to z faktu, że jedyna różnica pomiędzy schematami III i IV dotyczy miejsca powstania drugiego przegubu plastycznego – w przypadku schematu IV przegub ten powstaje w przekroju pręta, któremu odpowiada większy moment plastyczny niż w przypadku schematu III ($M_{pl}^{III} = \frac{16}{3}\pi a^3 \tau_{pl} > M_{pl}^{II} = 5\pi a^3 \tau_{pl}$). Dowodzą tego przedstawione na następnej stronie obliczenia.

Z równania pracy wirtualnej, przyjmując, że kąt $\delta\phi = 1$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 m \cdot l + M - M_{pl}^I - M_{pl}^{III} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{M}{2l}l + M = M_{pl}^I + M_{pl}^{III} \quad \Rightarrow \\
 \Rightarrow \quad M &= \frac{2}{3} (M_{pl}^I + M_{pl}^{III}) \quad \Rightarrow \\
 \Rightarrow \quad M &= \frac{2}{3} \left(\frac{14}{3}\pi a^3 \tau_{pl} + \frac{16}{3}\pi a^3 \tau_{pl} \right) \quad \Rightarrow \\
 \Rightarrow \quad M &= \frac{20}{3}\pi a^3 \tau_{pl} \approx 6,667\pi a^3 \tau_{pl} \approx 20,944a^3 \tau_{pl}
 \end{aligned}$$

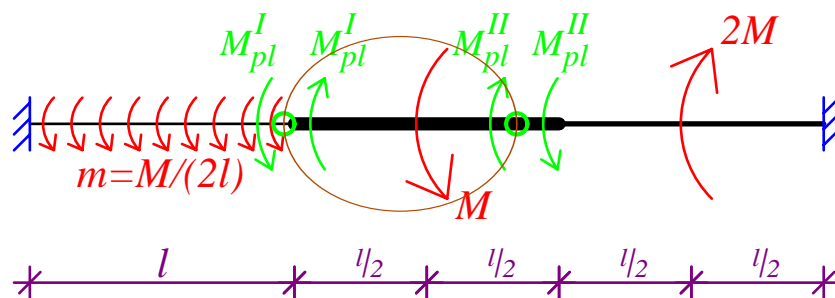
Schemat V



Z równania pracy wirtualnej, przyjmując, że kąt $\delta\phi = 1$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 -m \cdot l - M + 2M - M_{pl}^I - M_{pl}^{III} &= 0 \quad \Rightarrow \\
 \Rightarrow \quad -\frac{M}{2l}l + M &= M_{pl}^I + M_{pl}^{III} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}M = M_{pl}^I + M_{pl}^{III} \quad \Rightarrow \\
 \Rightarrow \quad M &= 2 (M_{pl}^I + M_{pl}^{III}) \quad \Rightarrow \\
 \Rightarrow \quad M &= 2 \left(\frac{14}{3}\pi a^3 \tau_{pl} + \frac{16}{3}\pi a^3 \tau_{pl} \right) \quad \Rightarrow \\
 \Rightarrow \quad M &= 20\pi a^3 \tau_{pl} \approx 62,832a^3 \tau_{pl}
 \end{aligned}$$

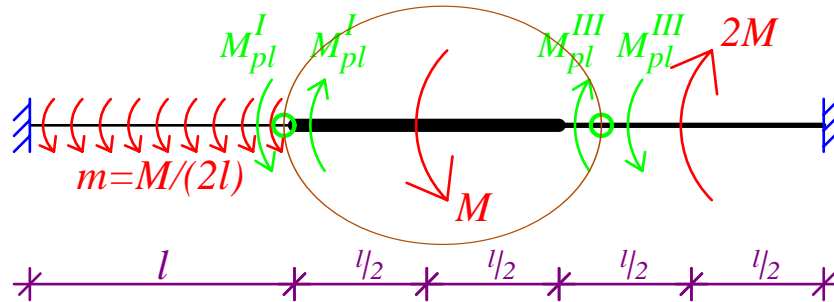
Schemat VI



Z równania pracy wirtualnej, przyjmując, że kąt $\delta\phi = 1$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} M - M_{pl}^I - M_{pl}^{II} &= 0 \quad \Rightarrow \quad M = M_{pl}^I + M_{pl}^{II} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad M &= \frac{14}{3}\pi a^3 \tau_{pl} + 5\pi a^3 \tau_{pl} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad M &= \frac{29}{3}\pi a^3 \tau_{pl} \approx 9,667\pi a^3 \tau_{pl} \approx 30,369a^3 \tau_{pl} \end{aligned}$$

Schemat VII

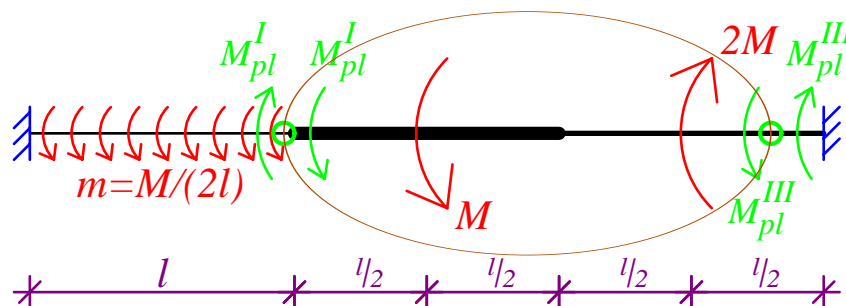


Analogicznie jak w przypadku schematów II i IV warto podkreślić, że jest łatwo zauważyć, że odpowiadające schematowi VII obciążenie M jest większe od obciążenia M odpowiadającego schematowi VI. Wynika to z faktu, że jedyna różnica pomiędzy schematami VI i VII dotyczy miejsca powstania drugiego przegubu plastycznego – w przypadku schematu VII przegub ten powstaje w przekroju pręta, któremu odpowiada większy moment plastyczny niż w przypadku schematu VI ($M_{pl}^{III} = \frac{16}{3}\pi a^3 \tau_{pl} > M_{pl}^{II} = 5\pi a^3 \tau_{pl}$). Dowodzą tego poniższe obliczenia.

Z równania pracy wirtualnej, przyjmując, że kąt $\delta\phi = 1$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} M - M_{pl}^I - M_{pl}^{III} &= 0 \quad \Rightarrow \quad M = M_{pl}^I + M_{pl}^{III} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad M &= \frac{14}{3}\pi a^3 \tau_{pl} + \frac{16}{3}\pi a^3 \tau_{pl} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad M &= 10\pi a^3 \tau_{pl} \approx 31,416a^3 \tau_{pl} \end{aligned}$$

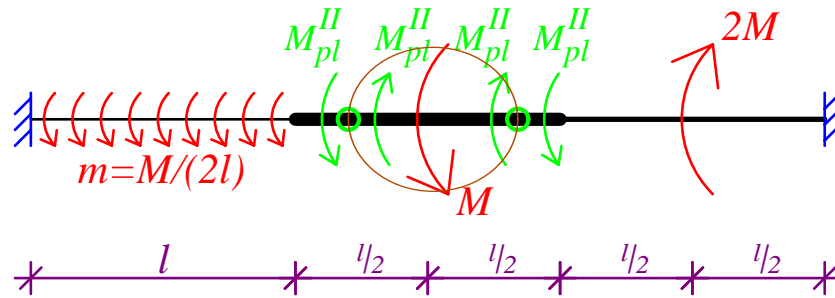
Schemat VIII



Z równania pracy wirtualnej, przyjmując, że kąt $\delta\phi = 1$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} -M + 2M - M_{pl}^I - M_{pl}^{III} &= 0 \quad \Rightarrow \quad M = M_{pl}^I + M_{pl}^{III} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad M &= \frac{14}{3}\pi a^3 \tau_{pl} + \frac{16}{3}\pi a^3 \tau_{pl} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad M &= 10\pi a^3 \tau_{pl} \approx 31,416a^3 \tau_{pl} \end{aligned}$$

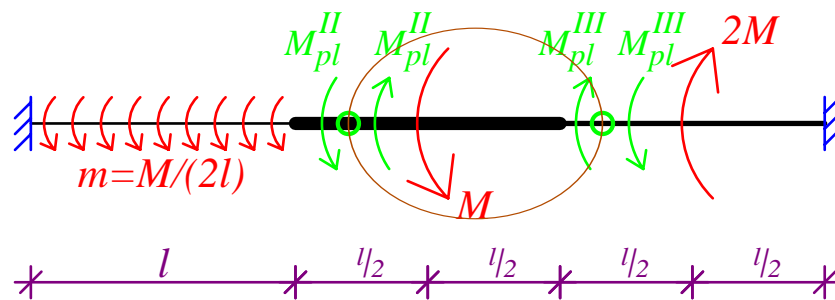
Schemat IX



Z równania pracy wirtualnej, przyjmując, że kąt $\delta\phi = 1$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} M - M_{pl}^{II} - M_{pl}^{II} &= 0 &\implies & M = 2M_{pl}^{II} &\implies \\ \implies M &= 2 \cdot 5\pi a^3 \tau_{pl} &\implies & M = 10\pi a^3 \tau_{pl} \approx 31,416a^3 \tau_{pl} \end{aligned}$$

Schemat X

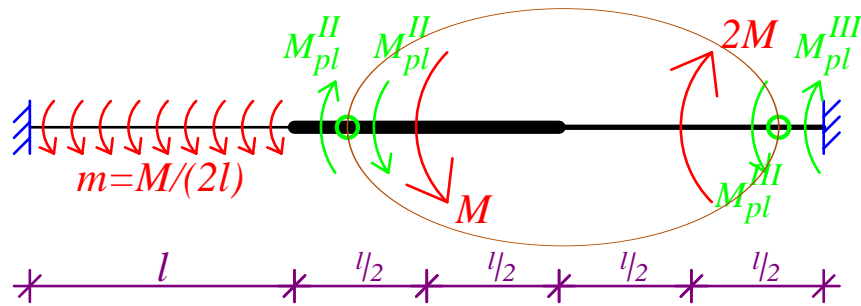


Analogicznie jak w przypadku schematów II, IV i VII warto podkreślić, że jest łatwo zauważyć, że odpowiadające schematowi X obciążenie M jest większe od obciążenia M odpowiadającego schematowi IX. Wynika to z faktu, że jedyną różnicą pomiędzy schematami IX i X dotyczy miejsca powstania drugiego przegubu plastycznego – w przypadku schematu X przegub ten powstaje w przekroju pręta, któremu odpowiada większy moment plastyczny niż w przypadku schematu IX ($M_{pl}^{III} = \frac{16}{3}\pi a^3 \tau_{pl} > M_{pl}^{II} = 5\pi a^3 \tau_{pl}$). Dowodzą tego poniższe obliczenia.

Z równania pracy wirtualnej, przyjmując, że kąt $\delta\phi = 1$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} M - M_{pl}^{II} - M_{pl}^{III} &= 0 &\implies & M = M_{pl}^{II} + M_{pl}^{III} &\implies \\ \implies M &= 5\pi a^3 \tau_{pl} + \frac{16}{3}\pi a^3 \tau_{pl} &\implies & & \\ \implies M &= \frac{31}{3}\pi a^3 \tau_{pl} \approx 10,333\pi a^3 \tau_{pl} \approx 32,463a^3 \tau_{pl} \end{aligned}$$

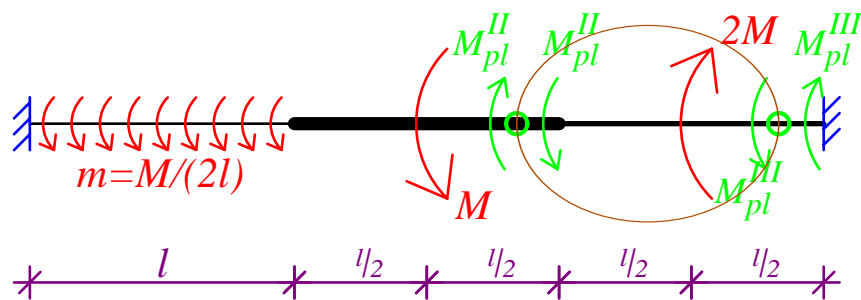
Schemat XI



Z równania pracy wirtualnej, przyjmując, że kąt $\delta\phi = 1$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 -M + 2M - M_{pl}^{II} - M_{pl}^{III} &= 0 \quad \Rightarrow \quad M = M_{pl}^{II} + M_{pl}^{III} \quad \Rightarrow \\
 \Rightarrow \quad M &= 5\pi a^3 \tau_{pl} + \frac{16}{3}\pi a^3 \tau_{pl} \quad \Rightarrow \\
 \Rightarrow \quad M &= \frac{31}{3}\pi a^3 \tau_{pl} \approx 10,333\pi a^3 \tau_{pl} \approx 32,463a^3 \tau_{pl}
 \end{aligned}$$

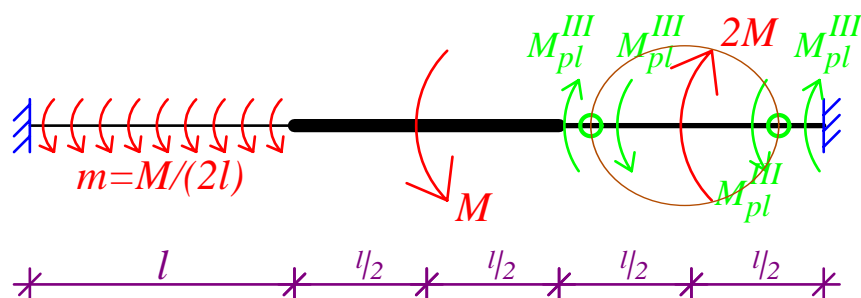
Schemat XII



Z równania pracy wirtualnej, przyjmując, że kąt $\delta\phi = 1$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 2M - M_{pl}^{II} - M_{pl}^{III} &= 0 \quad \Rightarrow \quad M = \frac{1}{2}(M_{pl}^{II} + M_{pl}^{III}) \quad \Rightarrow \\
 \Rightarrow \quad M &= \frac{1}{2}\left(5\pi a^3 \tau_{pl} + \frac{16}{3}\pi a^3 \tau_{pl}\right) \quad \Rightarrow \\
 \Rightarrow \quad M &= \frac{31}{6}\pi a^3 \tau_{pl} \approx 5,167\pi a^3 \tau_{pl} \approx 16,232a^3 \tau_{pl}
 \end{aligned}$$

Schemat XIII



Analogicznie jak w przypadku schematów II, IV, VII i X warto podkreślić, że jest łatwo zauważyć, że odpowiadające schematowi XIII obciążenie M jest większe od obciążenia M odpowiadającego schematowi XII. Wynika to z faktu, że jedyna różnica pomiędzy schematami XII i XIII dotyczy miejsca powstania pierwszego przegubu plastycznego – w przypadku schematu XIII przegub ten powstaje w przekroju pręta, któremu odpowiada większy moment plastyczny niż w przypadku schematu XII ($M_{pl}^{III} = \frac{16}{3}\pi a^3 \tau_{pl} > M_{pl}^{II} = 5\pi a^3 \tau_{pl}$). Dowodzą tego poniższe obliczenia.

Z równania pracy wirtualnej, przyjmując, że kąt $\delta\phi = 1$, otrzymujemy

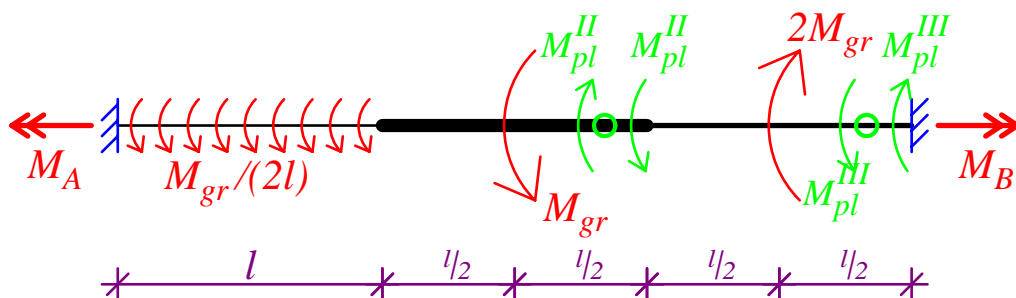
$$\begin{aligned} 2M - M_{pl}^{III} - M_{pl}^{III} &= 0 \quad \Rightarrow \quad M = \frac{1}{2} \cdot 2M_{pl}^{III} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad M &= M_{pl}^{III} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{16}{3}\pi a^3 \tau_{pl} \approx 5,333\pi a^3 \tau_{pl} \approx 16,755a^3 \tau_{pl} \end{aligned}$$

Ponieważ zostały rozpatrzone wszystkie schematy zniszczenia można obecnie określić graniczną wartość momentu skręcającego. Wartość ta jest równa najmniejszej spośród obliczonych wartości M .

$$\begin{aligned} M_{gr} = \min \left(\frac{56}{3}\pi a^3 \tau_{pl}; \frac{58}{3}\pi a^3 \tau_{pl}; \frac{58}{9}\pi a^3 \tau_{pl}; \frac{20}{3}\pi a^3 \tau_{pl}; 20\pi a^3 \tau_{pl}; \frac{29}{3}\pi a^3 \tau_{pl}; \right. \\ \left. 10\pi a^3 \tau_{pl}; 10\pi a^3 \tau_{pl}; 10\pi a^3 \tau_{pl}; \frac{31}{3}\pi a^3 \tau_{pl}; \frac{31}{3}\pi a^3 \tau_{pl}; \frac{31}{6}\pi a^3 \tau_{pl}; \right. \\ \left. \frac{16}{3}\pi a^3 \tau_{pl} \right) = \frac{31}{6}\pi a^3 \tau_{pl} \approx 5,167\pi a^3 \tau_{pl} \approx 16,232a^3 \tau_{pl} \end{aligned}$$

Obliczona powyżej wartość momentu skręcającego odpowiada schematowi XII. Oznacza to, według tego schematu konstrukcja przekształca się w mechanizm.

Należy pamiętać, że do obliczenia granicznej wartości momentu plastycznego nie jest konieczne sprawdzanie wszystkich kinematycznie dopuszczalnych schematów zniszczenia. Schematem, zgodnie z którym następuje bowiem zniszczenie konstrukcji, jest ten schemat, dla którego spełnione są warunki kinematyczne, równania równowagi i warunki plastyczności. Odpowiadające temu schematowi obciążenie jest obciążeniem granicznym. W praktyce oznacza to, że aby rozwiązać powyższe zadanie wystarczyło obliczyć odpowiadający schematowi XII moment M , a następnie dokonać zamieszczonego poniżej sprawdzenia. Oczywiście odgadnięcie według jakiego schematu następuje zniszczenie konstrukcji nie jest, w ogólnym przypadku, rzeczą prostą.

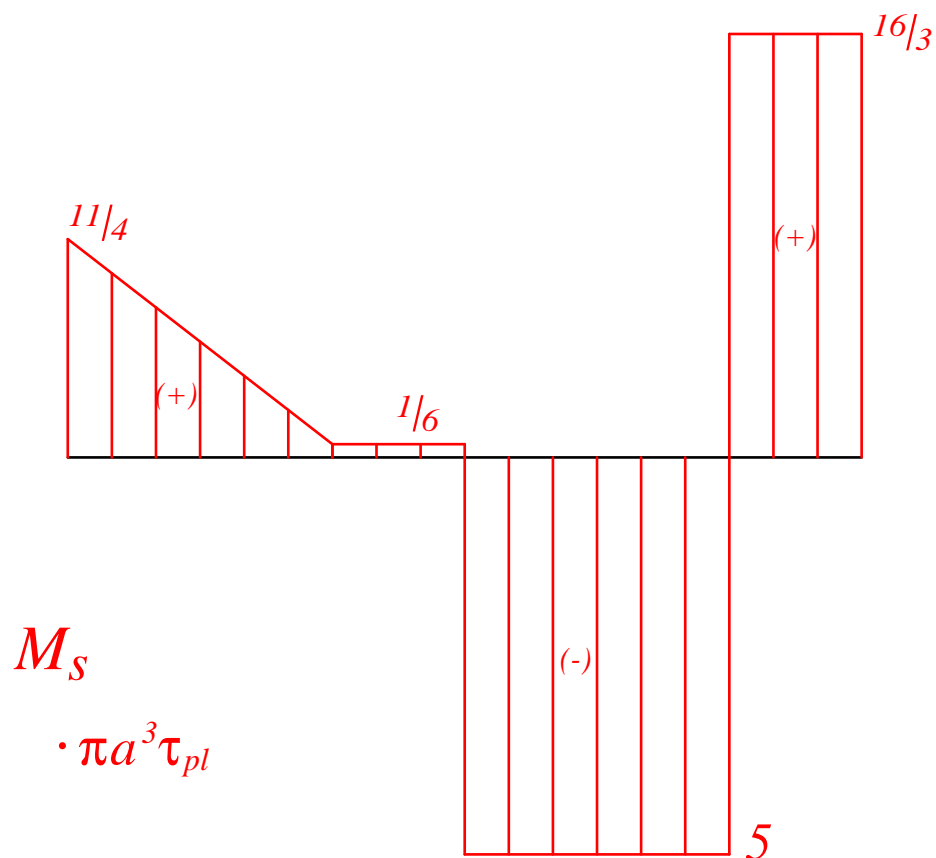


W celu obliczenia reakcji wykorzystamy warunek zerowania się sumy momentów skręcających

na odcinkach pomiędzy krańcami prętów, a przegubami plastycznymi.

$$\begin{aligned}
 M_A - \frac{M_{gr}}{2l} \cdot l - M_{gr} + M_{pl}^{II} &= 0 \quad \Rightarrow \quad M_A = \frac{3}{2}M_{gr} - M_{pl}^{II} \quad \Rightarrow \\
 \Rightarrow \quad M_A &= \frac{3}{2} \cdot \frac{31}{6}\pi a^3 \tau_{pl} - 5\pi a^3 \tau_{pl} \quad \Rightarrow \\
 \Rightarrow \quad M_A &= \left(\frac{31}{4} - 5\right)\pi a^3 \tau_{pl} \quad \Rightarrow \quad M_A = \frac{11}{4}\pi a^3 \tau_{pl} \approx 2,75\pi a^3 \tau_{pl} \\
 M_{pl}^{III} - M_B &= 0 \quad \Rightarrow \quad M_B = M_{pl}^{III} \quad \Rightarrow \\
 \Rightarrow \quad M_B &= \frac{16}{3}\pi a^3 \tau_{pl} \approx 5,333\pi a^3 \tau_{pl}
 \end{aligned}$$

Tak więc wykres momentu skręcającego ma postać:



Ponieważ maksymalny moment skręcający na długości pręta o przekroju I jest mniejszy od wartości dopuszczalnej ($\frac{11}{4}\pi a^3 \tau_{pl} < M_{pl}^I$) spełnione są warunki plastyczności, zaś uzyskane rozwiązanie jest zupełne – rozpatrywany schemat jest schematem, według którego następuje zniszczenia konstrukcji, a odpowiadające mu moment M jest momentem granicznym.