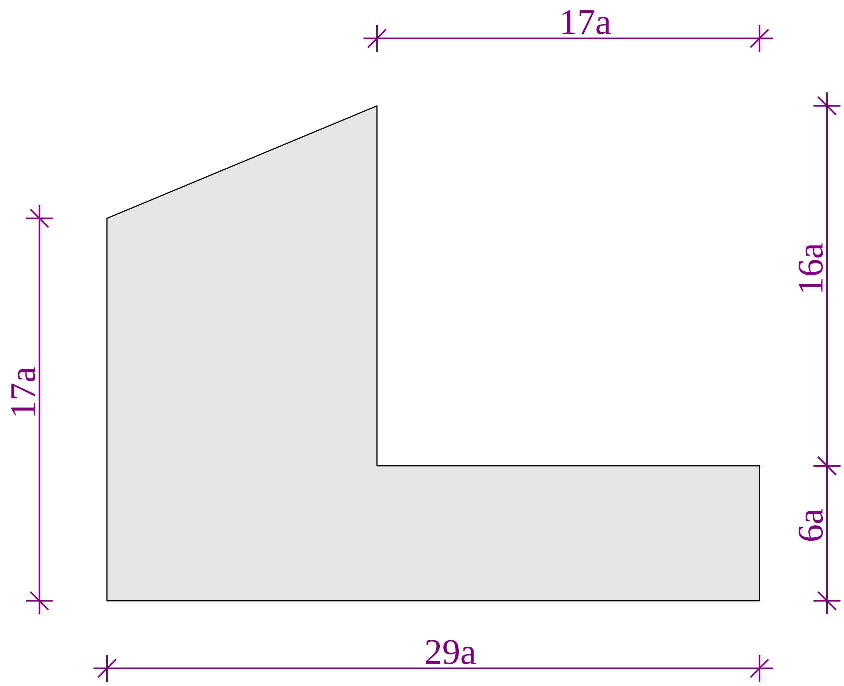
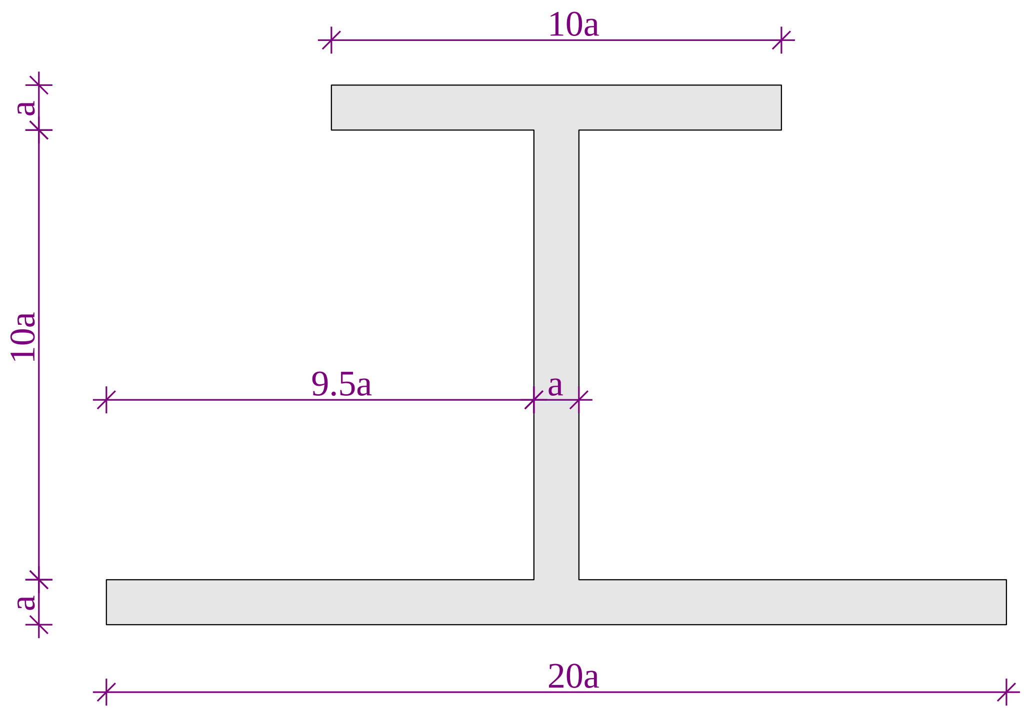
Przykład 10.5. Obliczenie wskaźnika plastyczności przy skręcaniu

Obliczyć wskaźniki plastyczności przy skręcaniu dla następujących przekrojów:

a) *n*-kąta foremnego
b) przekroju złożonego



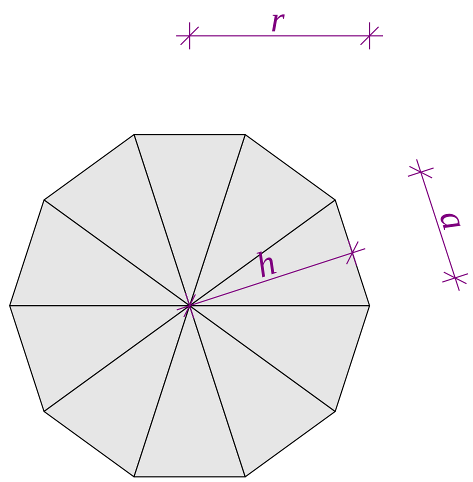
c) przekroju cienkościennego



Rozwiązanie

a) *n*-kąt foremny

Wskaźnik plastyczności przy skręcaniu dla przekrojów jednospójnych można łatwo policzyć korzystając z tzw. analogii Nadaia, zwanej również analogią wzgórza piaskowego. Zgodnie z nią wskaźnik plastyczności przy skręcaniu takiego przekroju równy jest podwojonej objętości bryły powstałej poprzez nasypanie piasku na przekrój, jeżeli kąt u podstawy owej bryły wynosi $45°$.



Tak więc, w rozpatrywanym przypadku wskaźnik plastyczności przy skręcaniu będzie równy podwojonej objętości ostrosłupa o podstawie n-kąta foremnego.

$$W_{pl} = 2V = 2 \cdot \frac{1}{3} SH$$

gdzie

V	–	objętość ostrosłupa
S	–	pole powierzchni podstawy
H	–	wysokość ostrosłupa

Rozpatrywany przekrój można podzielić na n trójkątów, tak więc pole powierzchni n-kąta foremnego jest równe:

$$S = n \cdot \frac{1}{2} ah$$

Ponieważ boku ostrosłupa tworzą z podstawą kąt $45°$, więc zachodzi zależność

$$H = h$$

Jeżeli założyć, że rozpatrywany wielokąt można wpisać w okrąg o promieniu r, to prawdą jest, że

$$\sin \frac{\frac{360°}{n}}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{r} \quad \Longrightarrow \quad a = 2r \sin \frac{180°}{n}$$

$$\cos \frac{\frac{360°}{n}}{2} = \frac{h}{r} \quad \Longrightarrow \quad h = r \cos \frac{180°}{n}$$

Tak więc

$$S = n \cdot \frac{1}{2}ah = \frac{n}{2} \cdot 2r \sin \frac{180°}{n} \cdot r \cos \frac{180°}{n} = \frac{n}{2} \cdot r^2 \cdot 2 \sin \frac{180°}{n} \cos \frac{180°}{n} =$$
$$= \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{360°}{n}$$

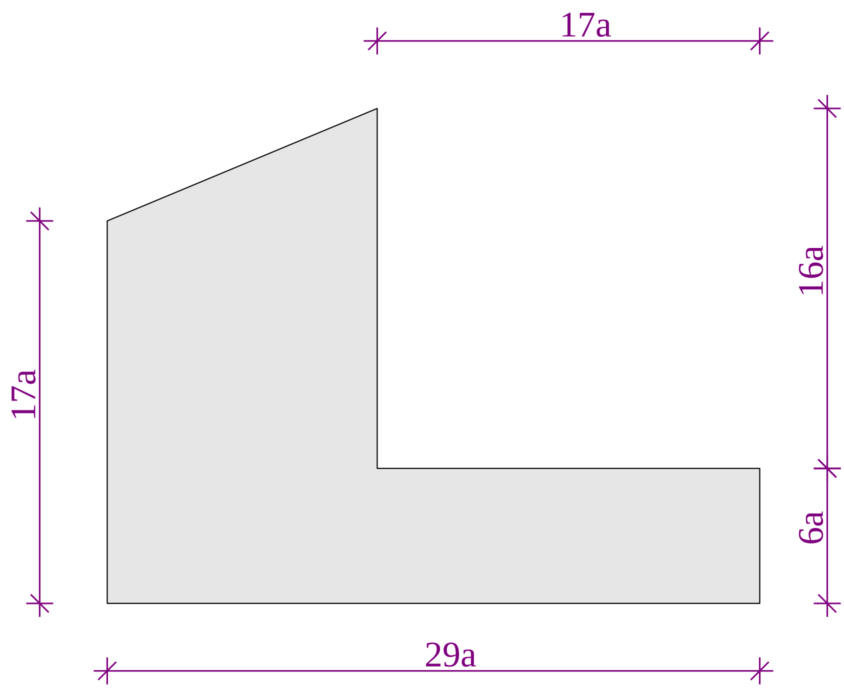
Objętość nasypanego ostrosłupa jest więc równa

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{360°}{n} \cdot r \cos \frac{180°}{n} = \frac{n}{6} r^3 \sin \frac{360°}{n} \cos \frac{180°}{n}$$

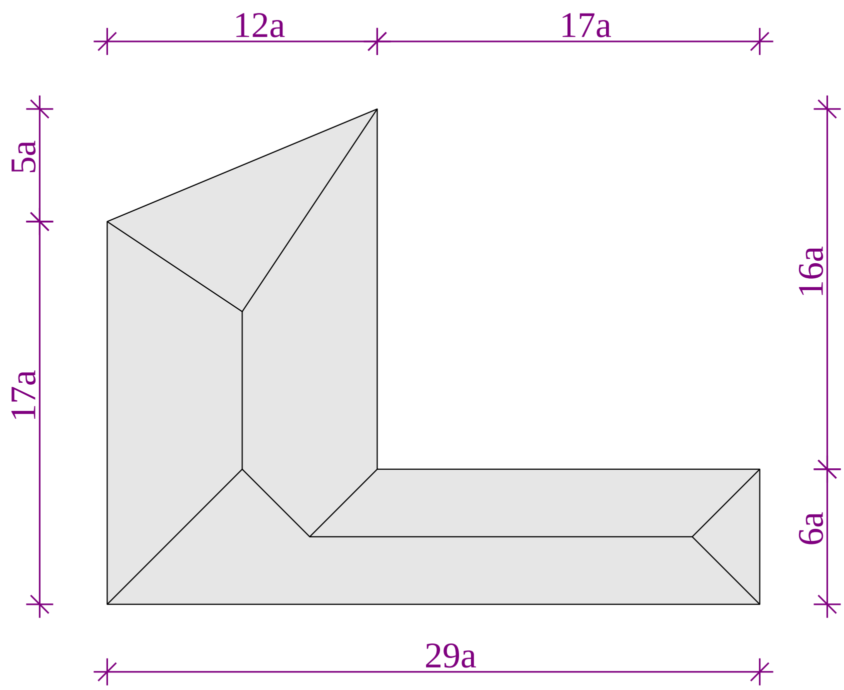
Ostatecznie można zapisać wzór na wskaźnik plastyczności przy skręcaniu przekroju w kształcie n-kąta foremnego:

$$W_{pl} = 2V = \frac{n}{3} r^3 \sin \frac{360°}{n} \cos \frac{180°}{n} = \frac{2}{3} n r^3 \sin \frac{180°}{n} \left(1 - \sin^2 \frac{180°}{n}\right)$$

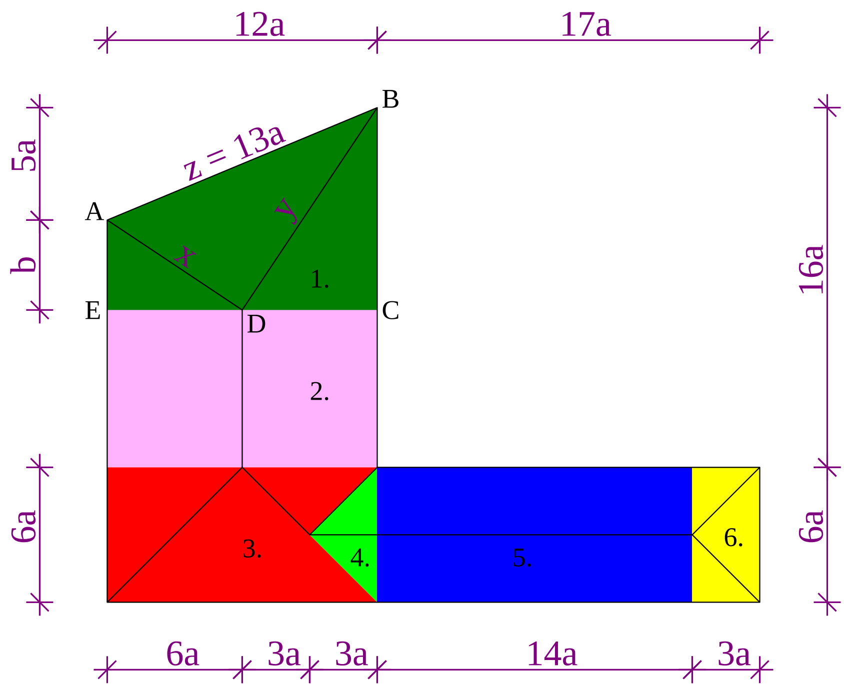
b) przekrój złożony



W celu obliczenia wskaźnika plastyczności przy skręcaniu powyższego przekroju ponownie zastosujemy analogię wzgórza piaskowego Nadaia.
Widok z góry usypanego wzgórza przedstawia poniższy rysunek.



Obliczenie objętości pokazanej bryły wymaga podzielenia jej na prostsze elementy.



Zgodnie z analogią Nadaia wskaźnik plastyczności przy skręcaniu wynosi zatem

$$W_{pl} = 2V = 2\left(V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6\right)$$

Figurą pierwszą jest ostrosłup o podstawie trapezu. Stąd

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot S_1 \cdot h_1$$

gdzie S_1 oznacza pole podstawy ostrosłupa, a h_1 jego wysokość.
Ponieważ kąt nachylenia boków do podstawy ostrosłupa wynosi $45°$ to

$$h_1 = \frac{12a}{2} = 6a$$

Jeśli oznaczymy wymiary ostrosłupa tak jak na rysunku poniżej, to możemy zapisać

$$S_1 = \frac{1}{2}\left(b + b + 5a\right) \cdot 12a = 6a\left(2b + 5a\right)$$

Nieznaną długość boków b i z można łatwo policzyć wykorzystując twierdzenie Pitagorasa, ponieważ trójkąt ABD jest prostokątny, co wykazaqno poniżej.

$$z^2 = (5a)^2 + (12a)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad z = \sqrt{25a^2 + 144a^2} = 13a$$

Ponieważ kąty nachylenia wszystkich boków bryły do podstawy są równe, więc odcinki AD i BD muszą leżeć na dwusiecznych odpowiednio $\sphericalangle EAD$ i $\sphericalangle ABC$. Czyli

$$\sphericalangle EAD = \sphericalangle DAB = \frac{1}{2}\sphericalangle EAB$$
$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC = \frac{1}{2}\sphericalangle ABC$$

Ponieważ podstawą bryły 1. jest czworokąt, w którym $\sphericalangle BCE = \sphericalangle CEA = 90°$, więc

$$\begin{aligned} &\sphericalangle EAB + \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCE + \sphericalangle CEA = 360° \implies \\ &\implies \quad \sphericalangle EAB + \sphericalangle ABC = 180° \implies \\ &\implies \quad 2\sphericalangle DAB + 2\sphericalangle ABD = 180° \implies \sphericalangle DAB + \sphericalangle ABD = 90° \end{aligned}$$

Suma kątów w trójkącie wynosi $180°$, więc

$$\sphericalangle ADB = 180° - (\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABD) = 180° - 90° = 90°$$

co oznacza, że trójkąt ABD jest trójkątem prostokątnym.
Tak więc można zapisać:

$$\begin{cases} x^2 = b^2 + (6a)^2 \\ y^2 = (b+5a)^2 + (6a)^2 \\ x^2 + y^2 = z^2 = (13a)^2 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 = b^2 + 36a^2 \\ y^2 = b^2 + 10ab + 61a^2 \\ x^2 + y^2 = 169a^2 \end{cases}$$

Stąd

$$\begin{aligned} b^2 + 36a^2 + b^2 + 10ab + 61a^2 = 169a^2 \implies \quad & 2b^2 + 10ab - 72a^2 = 0 \implies \\ \implies \quad & b^2 + 5ab - 36a^2 = 0 \end{aligned}$$

Pierwiastek z delty jest równy

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25a^2 + 4 \cdot 36a^2} = \sqrt{169a^2} = 13a$$

zaś wartość a

$$b = \frac{-5a + 13a}{2} = 4a$$

Tak więc

$$\begin{aligned} S_1 &= 6a\,(2 \cdot 4a + 5a) = 78a^2 \\ V_1 &= \frac{1}{3} \cdot 78a^2 \cdot 6a = 156a^3 \end{aligned}$$

Bryła druga to graniastosłup o podstawie trójkątnej, którego objętość wynosi

$$V_2 = \frac{1}{2} \cdot 12a \cdot 6a \cdot (17a - 4a - 6a) = 252a^3$$

Bryłą trzecią jest ostrosłup o podstawie prostokątnej.

$$V_3 = \frac{1}{3} \cdot 6a \cdot 12a \cdot 6a = 144a^3$$

Bryła czwarta to ostrosłup o podstawie trójkątnej, tak więc

$$V_4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6a \cdot 3a \cdot 3a = 9a^3$$

Bryły piąta i szósta to odpowiednio graniastosłup o podstawie trójkątnej i ostrosłup o podstawie prostokątnej, stąd

$$V_5 = \frac{1}{2} \cdot 6a \cdot 3a \cdot (17a - 3a) = 126a^3$$
$$V_6 = \frac{1}{3} \cdot 6a \cdot 3a \cdot 3a = 18a^3$$

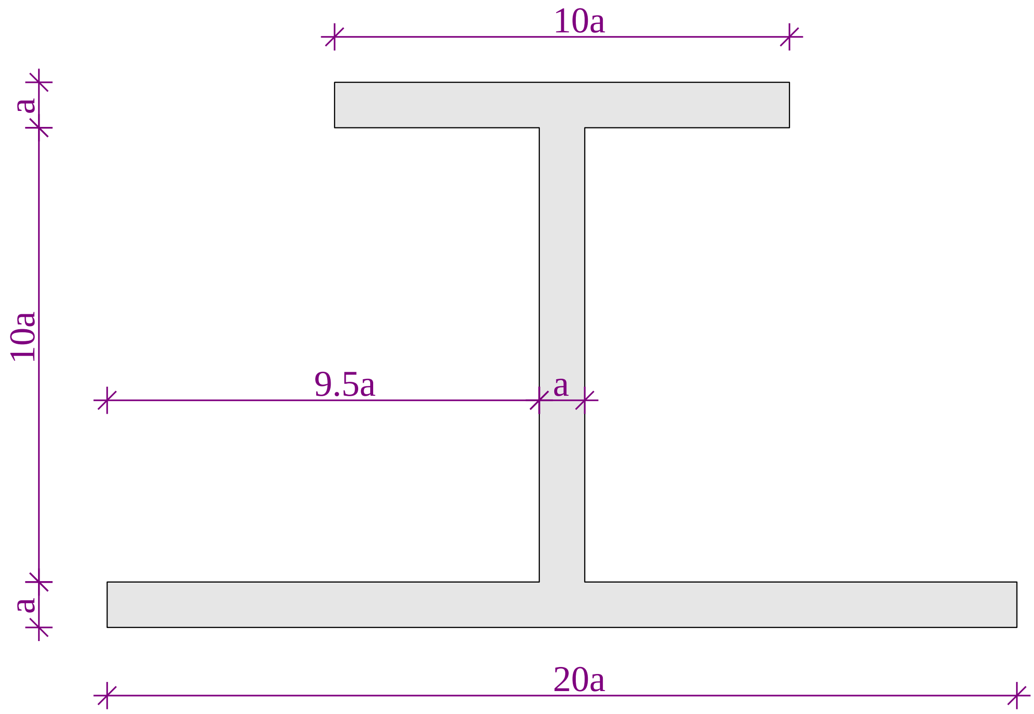
Ostatecznie więc objętość bryły nasypanego piasku jest równa

$$V = \sum_{i=1}^{6} V_i = 156a^3 + 252a^3 + 144a^3 + 9a^3 + 126a^3 + 18a^3 = 705a^3$$

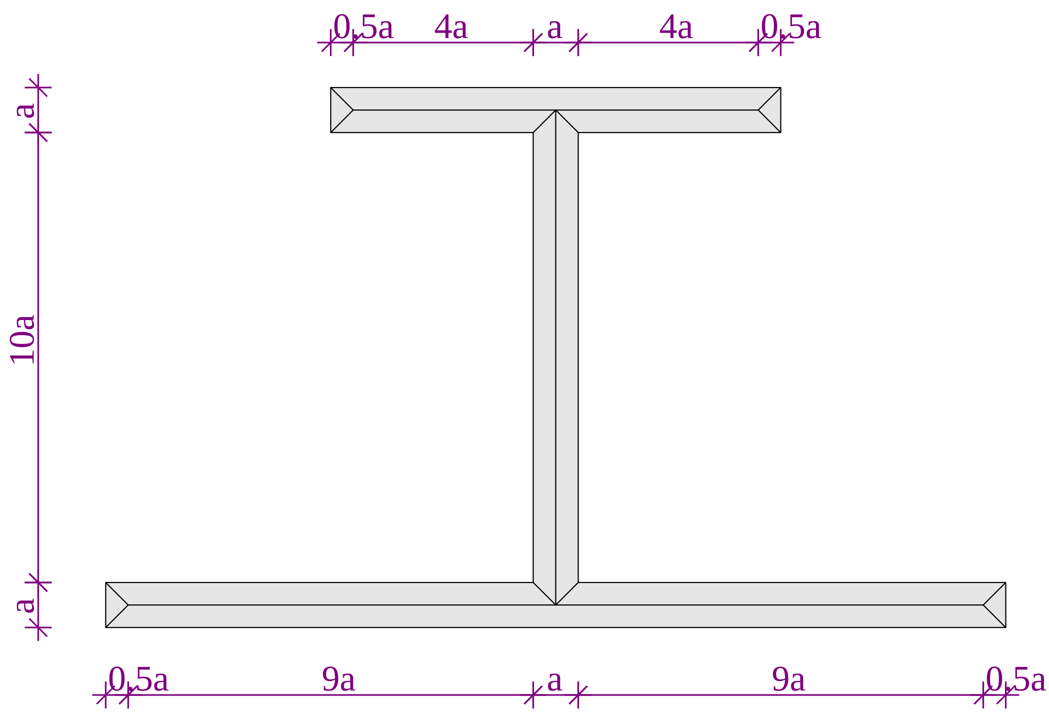
Stąd szukany wskaźnik plastyczności przy skręcaniu wynosi

$$W_{pl} = 2V = 2 \cdot 705a^3 = 1410a^3$$

c) przekrój cienkościenny



Podobnie jak w przypadku $b)$ aby obliczyć wartość wskaźnika plastyczności przy skręcaniu należy podwoić objętość bryły, która powstałaby w wyniku nasypania piasku na rozpatrywany przekrój, przy założeniu, że kąt u podstawy tej bryły byłby równy $45°$.



$$W_{pl} = 2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot (9a + a + 9a + 10a + 4a + a + 4a) + 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} + \right.$$
$$\left. + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\right] = 2 \cdot \left(\frac{38}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right) a^3 = 19\frac{5}{6}a^3 \approx 19{,}83a^3$$

W wielu przypadkach obliczenie dokładnej wartości wskaźnika plastyczności przy skręcaniu może być czasochłonne. Jeśli przekrój można podzielić na n prostokątów o wymiarach $a_i \times h_i$, przy czym $a_i \gg h_i$ sensowne jest użycie wzoru uproszczonego, który ma następującą postać:

$$W_{pl}^u = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i {h_i}^2$$

W rozpatrywanym przypadku można wyodrębnić trzy prostokąty.
rys.
Tak więc

$$W_{pl}^u = \frac{1}{2} \left(10a \cdot a^2 + 10a \cdot a^2 + 20a \cdot a^2\right) = 20a^3$$

Różnica pomiędzy rozwiązaniem dokładnym, a przybliżonym wynosi w tym przypadku

$$\Delta = \frac{W_{pl}^u - W_{pl}}{W_{pl}} \cdot 100\% = \frac{20a^3 - 19\frac{5}{6}a^3}{19\frac{5}{6}a^3} \cdot 100\% \approx 0{,}84\%$$