# Zagadnienie brachistochrony

Michał Pawlak
Katedra Mechaniki Materiałów PŁ

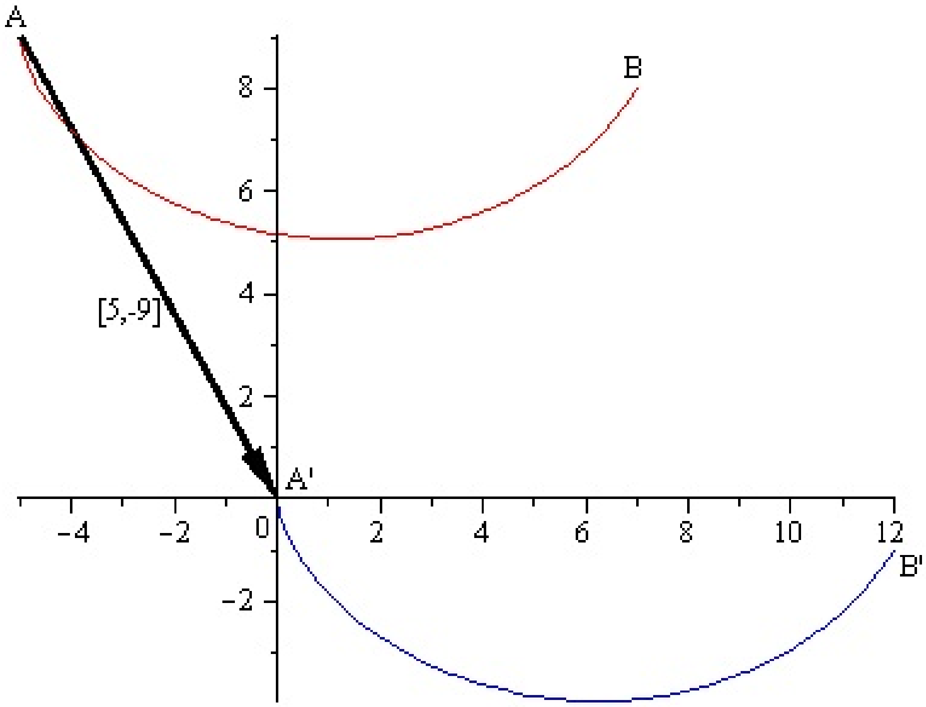
Zadanie

Metodami rachunku wariacyjnego wyznaczyć taką linię $y = f(x)$, aby staczający się po niej ciężki punkt z punktu $A = (-5, 9)$ do punktu $B = (7, 8)$ odbył tę podróż w możliwie najkrótszym czasie.

Rozwiązanie

Zadanie to jest klasycznym zadaniem z rachunku wariacyjnego postawionym przez Jakuba Bernoulliego w roku 1696 znanym w literaturze jako *zadanie o brachistochronie*. Nazwa pochodzi od złożenia greckich słów *brachistos* – najkrótszy i *chronos* – czas. Postawiony problem rozwiązali bracia Bernoulli (niezależnie od siebie), Newton i L'Hospital. Jak się dalej okaże brachistochrona jest cykloidą leżącą w pionowej płaszczyźnie przechodzącej przez podane punkty. [2]

Bez straty ogólności przyjmijmy, że $A \to A' = [0, 0]$ oraz $B \to B' = [12, -1]$



Krzywa przechodząca przez punkty $A'$ i $B'$ jest określona równaniem jawnym $y = y(x)$, $0 \leq x \leq x_2$, gdzie $x_2 = 12$. Z zasady zachowania energii wiemy, że

$$\frac{mv^2}{2} = mgy$$

i stąd mamy

$$v = \sqrt{2gy},$$

gdzie

| | | |
|---|---|---|
| $y$ | – | wysokość na której znajduje się punkt materialny, |
| $v$ | – | wartość prędkości w danej chwili czasu, |
| $g$ | – | przyspieszenie ziemskie, |
| $m$ | – | masa ciała. |

Długość wektora prędkości wyraża się wzorem

$$v(t) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2},$$

a po zamianie zmiennych otrzymujemy

$$v(t)dt = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Uwzględniając zasadę zachowania energii

$$dt = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2gy}} dx.$$

Wówczas całkowity czas ruchu ciała z położenia $A' = [0, 0]$ w położenie $B' = [x_1, y_1] = [12, -1]$ będzie wyrażony

$$J[y] = \sqrt{\frac{1}{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} dx. \tag{1}$$

By znaleźć równanie krzywej dla której funkcjonał określony wzorem (1) przyjmuje wartość minimalną skorzystamy z poniższego twierdzenia.

**Twierdzenie 1** *Warunkiem koniecznym tego, aby funkcjonał*

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx, \tag{2}$$

*określony w zbiorze funkcji $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, mających ciągłą pochodną i spełniających warunki $y(a) = A$, $y(b) = B$, osiągał dla danej funkcji $y(x)$ ekstremum, jest, aby ta funkcja spełniała równanie Eulera*

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0. \tag{3}$$

Ponadto

**Definicja 1** *Linię, dla której funkcjonał przybiera wartość (lokalnie) najmniejszą lub największą nazywa się linią ekstremalną (ekstremalą).*

W rozważanym zadaniu funkcjonał $J[y]$ nie zawiera argumentu $x$ i wyrażenie podcałkowe jest zapisane w formie $F = F(y, y')$. Skorzystać można z następującej własności.

**Własność 1** *Jeżeli całka określona wzorem (2) nie zależy jawnie od zmiennej $x$ możemy zamiast równania Eulera zastosować tożsamość Beltramiego*

$$F - y' F_{y'} = C, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Korzystając z (4) dla (1)

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C\sqrt{2g}, \quad C \in \mathbb{R},$$

a po uproszczeniu dostajemy

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} &= C\sqrt{2g}, \\ y(1+y'^2) &= C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \\ y &= \frac{C_1}{1+y'^2}. \end{aligned}$$

Przyjmijmy teraz

$$y' = \operatorname{ctg} t.$$

Wtedy

$$y(t) = \frac{C_1}{2}(1 - \cos 2t), \tag{5}$$

stąd

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2C_1 \sin t \cos t dt}{\operatorname{ctg} t} = 2C_1 \sin^2 t dt,$$

a więc

$$x(t) = \int C_1(1 - \cos 2t)dt = C_1 t - \frac{C_1 \sin 2t}{2} + C_2 = \frac{C_1}{2}(2t - \sin 2t) + C_2. \tag{6}$$

Jeżeli w równaniach (5) i (6) skorzystamy z warunku brzegowego, że $A' = [0, 0]$, to otrzymamy równanie parametryczne krzywej spadku najkrótszego czasu w postaci

$$\left\{ \begin{aligned} x(t) &= \tfrac{C_1}{2}(2t - \sin 2t) \\ y(t) &= \tfrac{C_1}{2}(1 - \cos 2t). \end{aligned} \right. \tag{7}$$

Równanie to jest równaniem ekstremali nazywanej cykloidą. Jest to krzywa jaką opisuje tor punktu leżącego na obwodzie koła, które toczy się bez poślizgu na prostej. Wielkość $\frac{C_1}{2}$ oznacza promień tego koła.

Stałą $C_1$ dla rozważanego zadania wyznaczymy z warunku, że $B' = [12, -1]$

$$\begin{cases} 12 &= \frac{C_1}{2}(2t - \sin 2t) \\ -1 &= \frac{C_1}{2}(1 - \cos 2t). \end{cases}$$

Wówczas $C_1 = -3,9361$, a czas spadku z krzywej opisanej równaniem (7) od punktu $A'$ do punktu $B'$ wynosi $t_{s_1} = 2,6133[s]$.

Ostatecznie równania parametryczne ruchu po brachistochronie o początku w punkcie $A$ i końcu w punkcie $B$ mają postać

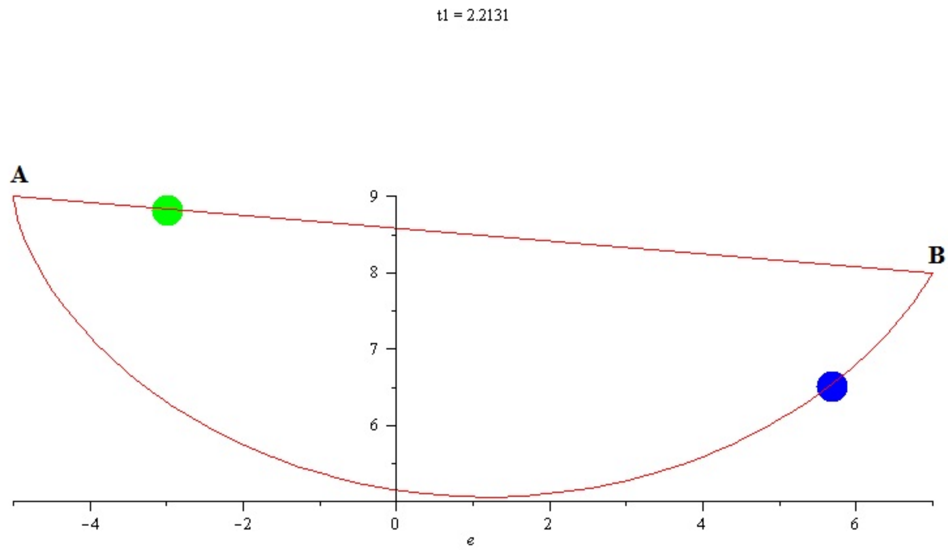
$$\begin{cases} x(t) &= \frac{3,9361}{2}(2t - \sin 2t) - 5 \\ y(t) &= -\frac{3,9361}{2}(1 - \cos 2t) + 9 \end{cases} \tag{8}$$

dla $t = 0 \ldots t_{s_1}$.

Dla ruchu po prostej o równaniu $y(x) = -\frac{1}{12}x + \frac{103}{12}$ od punktu $A$ do punktu $B$ czas ten wynosi $t_{s_2} = 5,43[s]$. Równania parametryczne ruchu po takiej równi pochyłej przyjmują postać

$$\begin{cases} x_r(t) &= \frac{6g}{145}t^2 - 5 \\ y_r(t) &= -\frac{g}{290}t^2 + 9 \end{cases} \tag{9}$$

dla $t = 0 \ldots t_{s_2}$.




Za pomocą programu *Maple* znaleziono stałą $C_1$ z (7) oraz wykonano animacje wykorzystując równania (8) i (9). Patrz: plik *brachistochrona1.mw*.

# Bibliografia


[1] L.E. Elsgolc, *Rachunek wariacyjny*, PWN, Warszawa 1960.

[2] I.M. Gelfand, S.W. Fomin, *Rachunek wariacyjny*, PWN, Warszawa 1975.

[3] D.A. McQuarrie, *Matematyka dla przyrodników i inżynierów*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006.

[4] T. Trajdos-Wróbel, *Matematyka dla inżynierów*, WNT, Warszawa 1965.