Funkcja naprężeń Airy'ego

Zapiszmy jeszcze raz układ trzech równań, słuszny w ważnym praktycznie przypadku, gdy siły objętościowe reprezentuje jedynie ciężar własny

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \rho g = 0 \tag{2}$$

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0 \tag{3}$$

Przypomnijmy, że oprócz powyższych równań powinny być spełnione warunki brzegowe na krawędziach

$$t_x = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y,$$

$$t_y = \sigma_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y.$$

Okazuje, że można układ trzech równań sprowadzić do jednego, wprowadzając funkcję naprężeń Airy'ego.

Jeżeli tę funkcję dwu zmiennych x i y oznaczymy przez $\Omega(x, y)$, to składowe stanu naprężenia będziemy określać ze wzorów

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \tag{4}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} - qgy \tag{5}$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} \tag{6}$$

Łatwo udowodnić, że równania równowagi (1) i (2) będą teraz spełnione tożsamościowo

$$\frac{\partial^3 \Omega}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 \Omega}{\partial y^2 \partial x} = 0 \tag{7}$$

$$-\frac{\partial^3 \Omega}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \Omega}{\partial y \partial x^2} - \rho g + \rho g = 0 \tag{8}$$

A więc przy stosowaniu zapisów (4), (5) i (6) równania równowagi nie będą już potrzebne. Do określenia funkcji naprężeń pozostaje równanie (3). Podstawiając do (3) wyrażenia z (4) i (5) otrzymujemy

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} - qgy) = 0. \tag{9}$$

Rozpisując (9) mamy

$$\frac{\partial^4 \Omega}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \Omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Omega}{\partial y^4} = 0. \tag{10}$$

To podstawowe równanie dla zagadnienia płaskiego jest więc równaniem biharmonicznym.

Aby zatem rozwiązać dowolne zadanie płaskie teorii sprężystości, należy dobrać taką biharmoniczną funkcję naprężenia $\Omega(x, y)$, która czyni zadość warunkom brzegowym.

Opierając się na funkcji naprężeń otrzymujemy odpowiednie wzory na składowe stanu naprężenia. Znając naprężenia łatwo znajdziemy odkształcenia ze związków fizyklanych, a następnie przemieszczenia z zależności geometrycznych.

Jak widać, znajomość funkcji naprężeń bardzo ułatwia rozwiązanie zadania płaskiego stanu naprężenia. Znamy wiele funkcji biharmonicznych. Należy jednak podkreślić, że rozwiązaniem danego zadania jest tylko taka funkcja Airy'ego, która spełnia wszystkie w dostatecznej liczbie sformułowane naprężeniowe warunki brzegowe.