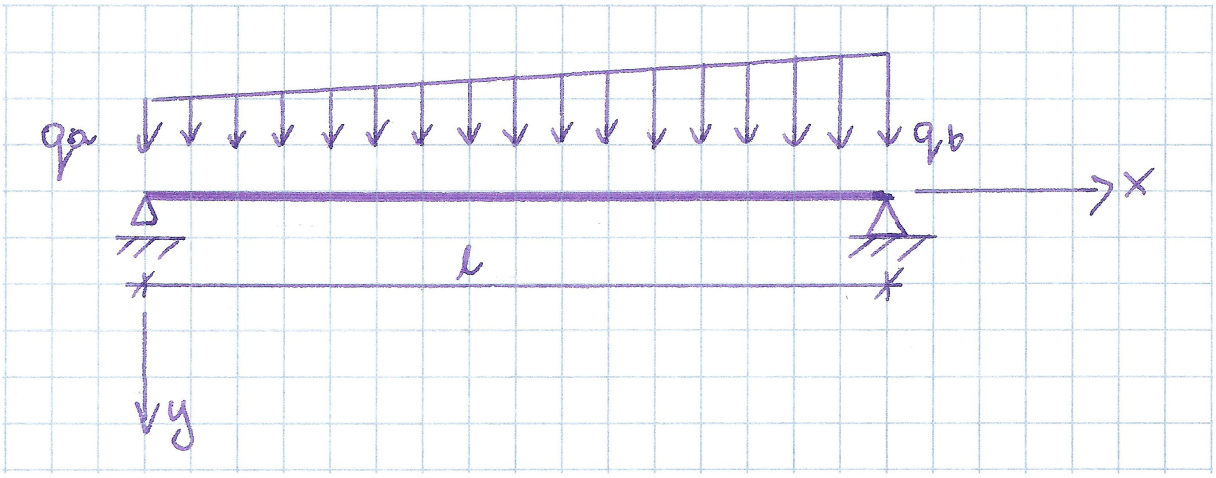
Teoria sprężystości i plastyczności - arkusz X

Korzystając z wiadomości z wykładu oraz dołączonego rozwiązanego przykładowego zadania, wykorzystując pakiet MAPLE, starannie opracuj poniższe zadanie.

Zadanie

Wyznacz rozwiązanie dokładne, a następnie rozwiąż za pomocą metody Ritz'a wykorzystując twierdzenie o minimum energii potencjalnej zagadnienie belki zginanej (równanie osi ugięcia) pokazanej na rysunku.



Porównaj na wykresach odpowiadające rozwiązaniu dokładnemu i przybliżonemu:

1. ugięcia,
2. kąty obrotu,
3. momenty zginające,
4. siły tnące.

Przyjmij następujące dane:
$E = 2,1 \cdot 10^{11}[\frac{N}{m^2}]$, $l = 4[m]$, $q_a = 1[\frac{N}{m}]$, $q_b = 3[\frac{N}{m}]$, $J_z = \frac{1}{12}h^3$, $h = 3$.

Wskazówki merytoryczne

Rozwiązanie dokładne $y_d(x)$ wyznaczymy z równania różniczkowego

$$EJ\Big(\frac{\partial^4 y_d(x)}{\partial x^4}\Big) = q_a + \frac{x(q_b - q_a)}{l}. \tag{1}$$

Rozwiązania przybliżonego $y_p(x)$ poszukujemy w klasie funkcji spełniających kinematyczne warunki brzegowe

$$y_p(x) = a_1 \sin\big(\frac{\pi x}{l}\big) + a_2 \sin\big(2\frac{\pi x}{l}\big) + a_3 \sin\big(3\frac{\pi x}{l}\big) + a_4 \sin\big(4\frac{\pi x}{l}\big) \tag{2}$$

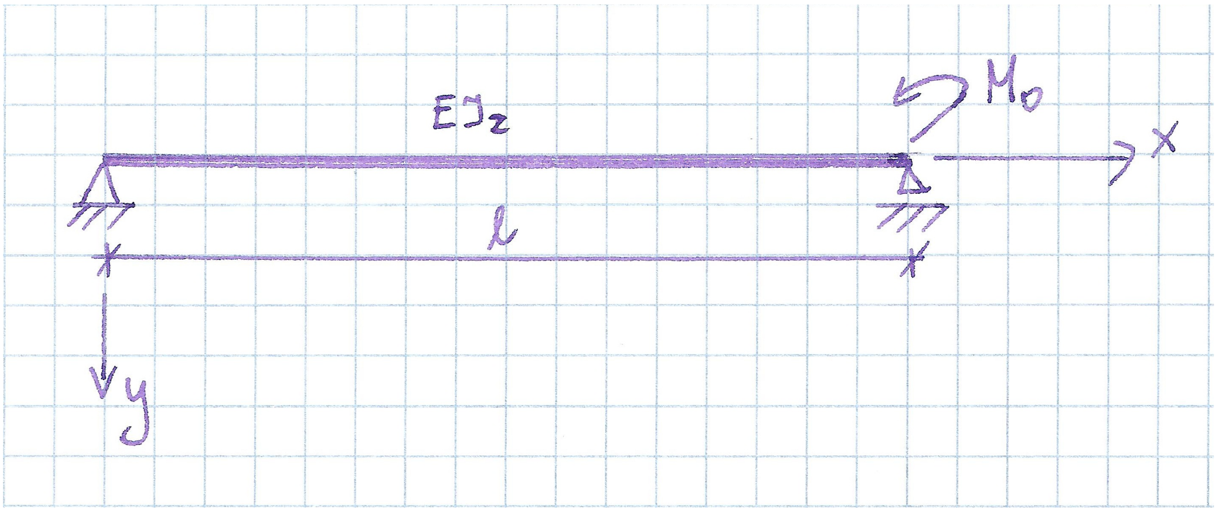
Funkcjonał energii potencjalnej dla belki zginanej ma postać

$$\Pi = \int_0^l \left[\frac{EJ}{2} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 - q(x)y(x) \right] dx. \tag{3}$$

Przy jakiej ilości stałych a_1, a_2, $\ldots$ rozwiązanie przybliżone jest najbliższe rozwiązaniu dokładnemu?

Zadanie przykładowe z rozwiązaniem

Korzystając z metody Ritza i twierdzenia o minimum energii potencjalnej wyznacz oś ugięcia belki.



Załóżmy funkcję, spełniającą warunki brzegowe $y(0) = 0$, $y(l) = 0$ w postaci

$$y(x) = a_1 x(l - x).$$

Energia sprężysta belki zginanej wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{2}\int_\Omega \sigma\varepsilon d\Omega &= \frac{1}{2}\int_0^l \int_A \Big(\frac{M(x)}{J_z}y\Big)^2 \frac{1}{E} dA dx \\ &= \frac{1}{2EJ_z^2}\int_0^l M^2(x)\int_A y^2 dA dx \\ &= \frac{1}{2EJ_z}\int_0^l \Big(-EJ_z y''\Big)^2 dx \\ &= \frac{EJ_z}{2}\int_0^l \Big(y''\Big)^2 dx. \end{aligned}$$

Dla założonej funkcji przemieszczenia (ugięcia) energia ta wynosi

$$U = \frac{EJ_z}{2}\int_0^l \Big[\big[a_1 x(l-x)\big]''\Big]^2 dx = \frac{EJ_z}{2}\int_0^l (-2a_1)^2 dx = 2EJ_z a_1^2 l.$$

Praca sił zewnętrznych na przemieszczeniach wynosi

$$L = -M_0\varphi = -M_0 y'(l) = -M_0(-a_1 l) = M_0 a_1 l.$$

Energia potencjalna

$$\Pi = U - L = 2EJ_z l a_1^2 - M_0 l a_1.$$

Z twierdzenia o minimum energii potencjalnej

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 4EJ_z l a_1 - M_0 l \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{M_0}{4EJ_z}.$$

Zatem

$$y(x) = \frac{M_0}{4EJ_z}(l - x)x.$$