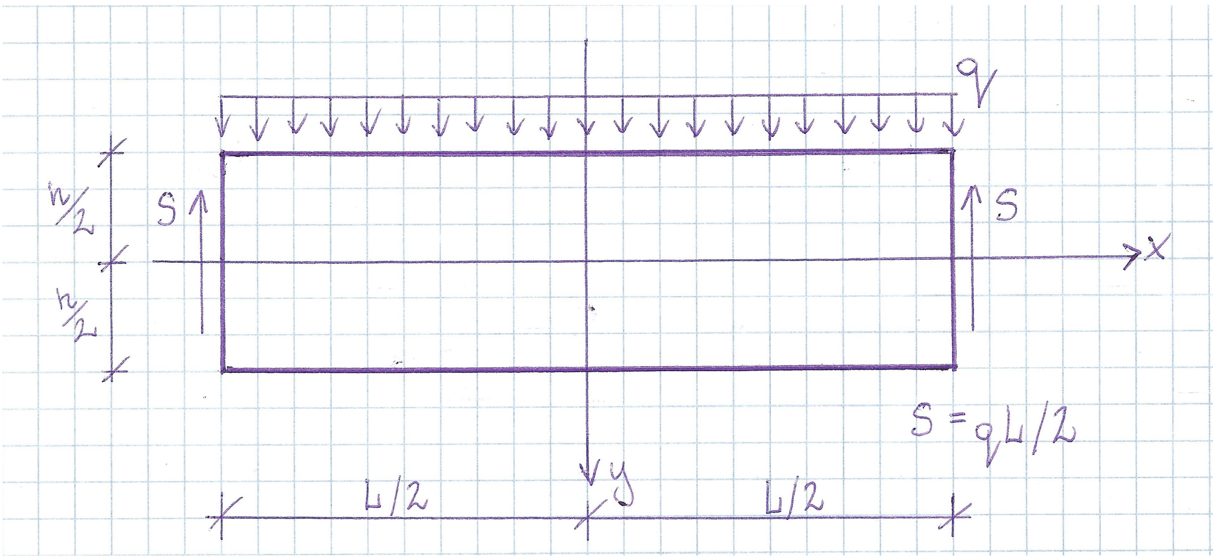
Teoria sprężystości i plastyczności - arkusz VIII

Korzystając z wiadomości z wykładu oraz materiałów dydaktycznych na stronie internetowej prowadzącego zajęcia starannie opracuj rozwiązanie poniższego zadania wykorzystując pakiet MAPLE.

Zadanie

Załóżmy, że jednoprzęsłowa belka o wąskim przekroju prostokątnym, jednostkowej szerokości, obciążona jest równomiernie jak na rysunku.



W celu umożliwienia rozwiązania belki przy zastosowaniu funkcji naprężeń w postaci wielomianu, reakcje podporowe wyobrażamy sobie jako siły styczne S przyłożone do końców belki.

Przyjmując funkcję naprężeń w postaci wielomianu

$$\Omega(x, y) = a_2x^2 + c_2y^2 + b_3x^2y + d_3y^3 - 5f_5x^2y^3 + f_5y^5$$

a) sprawdź czy tak przyjęta funkcja naprężeń spełnia równanie biharmoniczne,

b) wyznacz naprężenia,

c) zapisz warunki brzegowe*),1),

d) wyznacz stałe współczynniki wielomianu tak, aby były spełnione warunki brzegowe2),

e) wyznacz naprężenia w tarczy,

f) wyznacz funkcję naprężenia σ_{xxb} dla zginania belek Bernoulliego (założenie płaskich przekrojów),

g) narysuj wykresy naprężeń σ_{xx} dla $x = 0$, σ_{yy} dla $x = 0$, σ_{xy} dla $x = L/4$ dla różnych stosunków h do L,

h) narysuj na jednym wykresie naprężenia σ_{xx} i σ_{xxb}3),

i) narysuj wykres różnicy naprężeń $\sigma_{xx} - \sigma_{xxb}$ obliczonych dla tarczy i przy założeniu płaskich przekrojów dla $x = 0$ dla różnych stosunków h do L[4],

j) narysuj warstwice naprężeń[5].

Wskazówki merytoryczne

*) Warunki brzegowe, które muszą być spełnione na górnym i dolnym brzegu belki są następujące

$$\sigma_{yy}\big|_{y=\frac{h}{2}} = 0 \quad (1)$$
$$\sigma_{yy}\big|_{y=-\frac{h}{2}} = -q \quad (2)$$
$$\sigma_{xy}\big|_{y=\frac{h}{2}} = 0 \quad (3)$$
$$\sigma_{xy}\big|_{y=-\frac{h}{2}} = 0 \quad (4)$$

Na końcach belki sumy naprężeń stycznych muszą być równe reakcjom, czyli

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xy} dy = \frac{ql}{2} \quad (5)$$
$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xy} dy = -\frac{ql}{2} \quad (6)$$

Równanie(5) odnosi sie do lewego końca belki, a równanie (6) do prawego.

Ponieważ końce belki nie są obciążone żadnymi siłami podłużnymi ani momentami, zatem zachodzą warunki

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xx} dy = 0 \quad (7)$$
$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xx} y dy = 0 \quad (8)$$

przy $x = \pm\frac{L}{2}$.

Pomoc do implementacji w MAPLE

1)
```
>r2:=subs(y=-.5*h,sigma[yy]=-q);
>r5:=subs(x=L/2,int(sigma[xx],y=-h/2..h/2))=0;
>r8:=subs(x=L/2,int(sigma[xx]*y,y=-h/2..h/2))=0;
>r9:=subs(x=L/2,int(sigma[xy],y=-h/2..h/2))=-q*L/2;
>r10:=subs(x=-L/2,int(sigma[xy],y=-h/2..h/2))=q*L/2;
```

2)
```
>evalf(solve({r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10},{a2,c2,b3,d3,f5}),3);
```

3)
```
>plot({subs(q=1,x=0,sigma[xx]),subs(q=1,x=0,sigma[xxb])},
y=-h/2..h/2,title='sigma_xx');
```

4) >plot(subs(q=1,x=0,sigma[xx])-subs(q=1,x=0,sigma[xxb]),
y=-h/2..h/2,title='sigma_xx_roznica');

5) >with(plots);
>contourplot(subs(q=1,sigma[xx]),x=-L/2..L/2,y=-h/2..h/2,style=PATCH,
axes=BOX,scaling=CONSTRAINED,filled=true,coloring=[white,blue],
title='sigma_xx');